Durchgerechnetes Beispiel für das Lösen von Differentialgleichungssystemen

Im folgenden wird gezeigt, wie man ein System zweier gekoppelter, linearer DGL 1. Ordnung durch "Einsetzen" bzw. "Elimination" in *eine* DGL 2. Ordnung überführt. Da wir nur lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten lösen können, enthalten die Gleichungssystem ebenfalls nur konstante Koeffizienten. (Im Prinzip ist das Verfahren aber auf allg. lineare DGL System anwendbar!) Weiters betrachten wir nur homogene Gleichungen.

Betrachten wir als konkretes Beispiel

$$\begin{array}{lcccrcl} \text{I:} & y_1' & = & & y_1 & + & y_2 \\ \text{II:} & y_2' & = & -4 & y_1 & + & y_2 \end{array} \tag{1}$$

Schritt 1: Als erstes drücken wir aus einer der Gleichungen eine der gesuchten Funktionen als Funktion der jeweils anderen Funktion sowier deren Ableitung aus. Z.B. folgt aus I

$$y_2 = y_1' - y_1. \tag{2}$$

Um mit der aus I gewonnen Gl. 2 in Gl. II des Originalsystems einsetzen zu können, brauchen wir auch die Ableitung y_2' als Funktion von y_1. Daher differenzieren wir Gl. 2

$$y_2' = y_1'' - y_1'. \tag{3}$$

Unter Verwendung von Gl. 3 für die linke Seite von II und Gl. 2 für die rechte Seite erhalten wir für

$$\text{II:}\ \underbrace{y_1'' - y_1'}_{y_2'} = -4y_1 + \underbrace{y_1' - y_1}_{y_2},$$

welches sich zu

$$y_1'' - 2y_1' + 5y_1 = 0 \tag{4}$$

umformen läßt.

Schritt 2: Was y_1 betrifft, sind wir mit Gl. 4 jetzt auf vertrautem Territorium. Mittels des Standardansatzes $y_1 = e^{\lambda x}$ erhält man die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

mit den beiden konjugiert komplexen Lösungen

$${}_2\lambda_1 = 1 \pm 2i.$$

Daraus folgt, daß die beiden Funktionen $e^x \sin 2x$ und $e^x \cos 2x$ die DGL Gl. 4 lösen. Somit ist die allgemeinste Lösung von Gl. 4 durch

$$y_1 = Ae^x \sin 2x + Be^x \cos 2x = e^x\,(A \sin 2x + B \cos 2x) \tag{5}$$

gegeben.

Schritt 3: Um die fehlende Lösung für y_2 zu bekommen, setzen wir mit Gl. 5 in Gl. 2 ein, wobei wir als Zwischenschritt y_1' berechnen müssen. Nach Differenzieren (Produktregel!) und Zusammenfassen erhalten wir

$$y_1' = e^x\,[(A - 2B) \sin 2x + (2A + B) \cos 2x]\,.$$

Somit bekommt man für y_2

$$y_2 = \underbrace{e^x\,[(A - 2B) \sin 2x + (2A + B) \cos 2x]}_{y_1'} - \underbrace{e^x\,(A \sin 2x + B \cos 2x)}_{y_1}$$

was sich auf

$$y_2 = -2Be^x \sin 2x + 2Ae^x \cos 2x = e^x \left(-2B \sin 2x + 2A \cos 2x\right) \tag{6}$$

vereinfacht. Die allgemeinste Lösung des Gleichungssystems Gl. 1 ist also durch Gln. 5 (für y_1) und 6 (für y_2) gegeben.

Schritt 4, Anfangsbedingungen: Wir wollen jetzt die allgemeine Lösung noch auf Anfangsbedingungen spezialisieren. Es sei z.B.

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

Einsetzen in Gln. 5 und 6 ergibt ($e^0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$!)

$$\begin{aligned} B &= 1 \\ 2A &= 1 \end{aligned}$$

woraus $B = 1$ und $A = \frac{1}{2}$ folgt. Die spezielle Lösung des DGL Systems Gl. 1, die auch den Anfangsbedingungen genügt ist also

$$\begin{array}{rcl} y_1 &=& e^x\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \cos 2x\right) \\ y_2 &=& e^x\left(-2\sin 2x + \cos 2x\right) \end{array} \tag{7}$$

Anmerkungen: (1) Anstelle uns aus I y_2 auszudrücken, hätten wir uns aus II $y_1 = \frac{1}{4}(y_2 - y_2')$ ausdrücken können, und zunächst die allgemeine Lösung für y_2 ermitteln können. Achtung: Die unbestimmten Koeffizienten schauen natürlich "anders" aus, aber die spezielle Lösung, die den Anfangsbedingungen genügt, unterscheidet sich nicht von Gl. 7.

(2) Der hier gezeigt Lösungsweg führt auf das Lösen einer linearen DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wie im Skriptum gezeigt und in der Vorlesung besprochen, gibt es drei Lösungstypen, in Abhängigkeit von der Lösung der charakteristischen Gleichung: (i) zwei reelle Lösungen, (ii) zwei (konjugiert) komplexe Lösungen, und (iii) eine zusammenfallende reelle Lösung. Das hier gezeigte Beispiel führt auf den Lösungstyp (ii). Der Lösungsweg ist aber auf jeden der drei Typen anwendbar!