Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine Kurzeinführung im Rahmen der Vorlesung "Mathematik und Statistik für Molekularbiologen"

Stefan Boresch
stefan@mdy.univie.ac.at, http://www.mdy.univie.ac.at/en/sbhome.html
Molecular Dynamics and Biomolecular Simulation Group,
Institut für Theoretische Chemie und Molekulare Strukturbiologie,
Universität Wien, Währingerstraße 17, 1090 Wien, Austria

2. Februar 2009

Vorbemerkung

Eine ganz kurze Anmerkung zum verwendeten Schriftsatz. Die normale Schriftgröße wird für essentielles Material verwendet.

Längere Beispiele sind einerseits um Platz zu sparen, andererseits um sie optisch ein wenig zu kennzeichnen in einem etwas kleinerem Font geschrieben

Zusätzliche Beispiele, optionales Material, Nebenbemerkungen usw. schließlich sind "wirklich klein" gehalten.

Der Stoff von Abschnitten 3.3.2 und 3.4 dient der Vertiefung für Interessierte und ist optional!

1 Einleitung

1.1 Ein erstes Beispiel — die *quadrierbare* Differentialgleichung 1. Ordnung

Sie alle haben bereits folgenden Typ von Differentialgleichungen (DGL) gelöst bzw. wissen, wie er zu lösen ist:

$$y' - h(x) = 0 \tag{1}$$

In Gl. 1 versteht sich $y' = y'(x)$ und gefragt ist nach $y(x)$.[1] Wenn gilt, daß

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = h(x),$$

so muß nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung gelten, daß

$$y(x) = \int dx\, h(x) + C. \tag{2}$$

(Auf die wichtige Rolle der Integrationskonstanten (von uns beim Integrieren immer stiefmütterlich behandelt) beim Lösen von DGL kommen wir gleich zu sprechen.) Gleichung 2 ist die Lösung der DGL Gl. 1. Ob das Integral lösbar ist oder nicht spielt übrigens eine untergeordnete Rolle, vom Standpunkt des Lösens der DGL ist nur wichtig, die Ableitung(en) wegbekommen zu haben. (*Natürlich wird von Ihnen erwartet, daß Sie lösbare Integrale, ggf. unter Verwendung der Formelsammlung, auch lösen!!*)

Beim Lösen von DGL (vor allem 1. Ordnung) bewährt sich die Leibnitz'sche Schreibweise der Ableitung, d.h. $y'(x) = \frac{dy}{dx}$. Lösen wir Gleichung 1 nochmals ganz schrittweise:

$$\frac{dy}{dx} = h(x)$$

$$dy = dx\, h(x) \qquad \text{(A)}$$

$$\int dy = \int dx\, h(x)$$

$$y + c_1 = \int dx\, h(x) + c_2 \qquad \text{(B)}$$

$$y = \int dx\, h(x) + C$$

[1] Wenn nicht der physikalische, biologische, chemische Kontext andere Symbole nahelegt, ist es auf dem Gebiet der DGL üblich, die gesuchte Funktion als $y = y(x)$ anstatt $f(x)$ anzuschreiben. Wir folgen dieser Konvention.

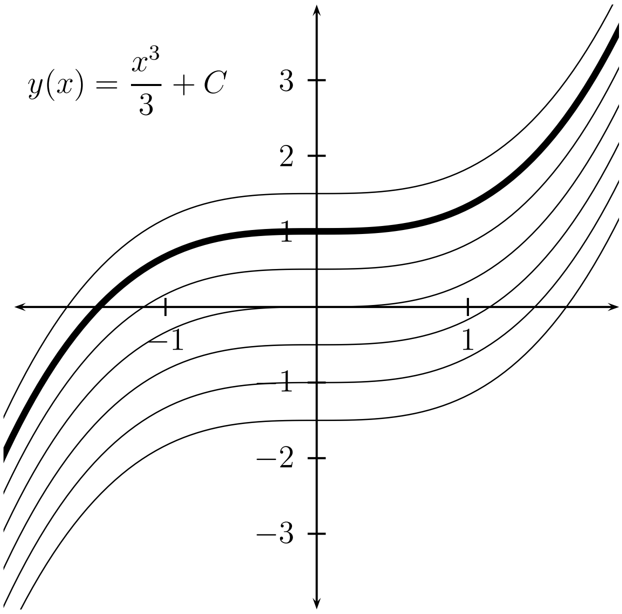

Abbildung 1: Einige mögliche Lösungen der DGL $y' = x^2$. Gezeichnet ist die Funktionenschar mit $C = -1.5, -1.0, -0.5, 0.0, +0.5, +1.0, +1.5$. Die spezielle Lösung $C = 1$, die der AB $y(0) = 1$ genügt, ist fett gezeichnet.

Der interessante Schritt ist (A). Wie Sie sehen, jongliert man mit den Differentialen ganz ungestört, als ob $\frac{dy}{dx}$ ein normaler Bruch wäre. Man darf das, und es wird sich in den folgenden Abschnitten als nützlich erweisen.

Im Prinzip (s. Zeile (B)) erhält man natürlich sowohl auf der linken, als auch auf der rechten Seite eine Integrationskonstante. Man faßt die beiden aber immer zu einer zusammen, was dann zu Gleichung 2 führt. Die Rolle der Integrationskonstanten verdeutlicht am besten ein Beispiel:

$$y'(x) = x^2$$
$$y = \int dx\, x^2 + C = \frac{x^3}{3} + C \tag{3}$$

Überlegen Sie sich, was die Lösung Gl. 3 eigentlich bedeutet: Die Lösung $y = x^3/3 + C$ ist nicht eindeutig, es gibt abhängig vom Wert der Integrationskonstanten C unendlich viele Lösungen, einige davon sind in Abbildung 1 gezeigt.

Man bezeichnet Gl. 3 daher als die *allgemeine* Lösung der DGL $y' = x^2$. Erst durch hinzufügen einer *Anfangsbedingung* (AB) kommt es zur *speziellen* Lösung. Wenn wir z.B. in unserem Beispiel verlangen, das $y(0) = 1$ ist, so erfüllt nur mehr genau eine Funktion sowohl die DGL, als auch die AB: Es gilt jetzt

$$y(0) = \frac{1}{3}\, 0 + C = 1$$

und somit findet man $C = 1$. Die spezielle Lösung dieses Beispiels lautet also

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + 1.$$

Hier in der Vorlesung liegt das Schwergewicht auf dem Suchen der allgemeinen Lösung für einige wichtige Typen von DGL. In den Anwendungen sind jedoch die AB, die sich aus der jeweiligen physikalischen, chemischen oder biologischen Problemstellung ergeben, oft ebenso wichtig.

1.2 Überblick und Nomenklatur

Als gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL) bezeichnet man Gleichungen, die eine Funktion y *einer* Variablen x, $y = y(x)$, in Beziehung mit ihren Ableitungen setzt, d.h.,

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{4}$$

(Ist $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ eine Funktion mehrerer Veränderlicher, so spricht man von *partiellen* Differentialgleichungen — diese werden in dieser Lehrveranstaltung nicht behandelt.)

Das Lösen von DGL hängt wie Sie sehen werden sehr von der Form der jeweiligen Gleichung ab. Es ist daher sehr wichtig, DGL zu klassifizieren, d.h. beinahe wie in Botanik oder Zoologie eine Einteilung nach bestimmten Merkmalen vorzunehmen. Diese Klassifizierung ist der erste Schritt zur Lösung einer DGL. Hat man nämlich die DGL zugeordnet, durchsucht man Formelsammlungen bzw. spezielle Lehrbücher, ob es für diesen Typ von DGL einen Lösungsansatz ("Kochrezept") gibt, oder ob diese Gleichung nicht allgemein lösbar ist (was durchaus auch vorkommen kann).

Die beiden wichtigsten Kriterien sind *Ordnung* der DGL, sowie die Frage, ob es sich um eine *lineare* oder *nichtlineare* DGL handelt.

Ordnung: Die höchste Ableitung, die in einer DGL (Gl. 4) vorkommt, bestimmt die Ordnung der DGL, z.B. sind

$$y'' - 5y = 0$$

eine DGL 2. Ordnung,

$$y^{(5)} - \sin xy' + e^x = 0$$

eine DGL 5. Ordnung und

$$y^2(1 + (y')^2) - 1 = 0$$

eine DGL 1. Ordnung.

Linearität: In linearen DGL treten *keine* Produkte oder nichtlineare Funktionen von $y(x)$ (d.h. der gesuchten Funktion) und deren Ableitungen auf. Z.B. sind

$$\sqrt{\frac{1 - a^x}{\sin(x^2)}}\, y' - \tan(x^{-1})\, y - e^{\cos x} = 0$$

eine lineare DGL 1. Ordnung,

$$y^2(1 + (y')^2) - 1 = 0$$

jedoch eine nichtlineare DGL 1. Ordung (wegen der Produkte y^2 und y'^2!).

Die allgemeinste lineare DGL n-ter Ordnung hat die Form

$$b_n(x)y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + b_1(x)y'(x) + b_0(x)y(x) = g(x),$$

welche man gewöhnlich in der Standardform

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y(x) = h(x). \tag{5}$$

schreibt ($a_1(x) = b_{n-1}(x)/b_n(x)$, …, $h(x) = g(x)/b_n(x)$). Die Chancen, eine lineare DGL zu lösen, stehen im allgemeinen um vieles besser als bei nichtlinearen DGL.

2 Zu Differentialgleichungen 1. Ordnung

2.1 Separierbare DGL

2.1.1 Lineare, separierbare DGL

Nach dieser Übersicht auf zum ersten Typ von DGL, deren Lösung man nicht sofort hinschreiben kann.

$$y' = k\,y, \tag{6}$$

wobei k ein Konstante ist. In Gleichung 6 kommen sowohl die gesuchte Funktion $y(x)$ als auch ihre Ableitung $y'(x)$ vor. Der Systematik wegen halten wir fest, daß die Gleichung sowohl in y als auch in y' linear ist. Zur Lösung schreibt man die Ableitung in Leibnitz'scher Notation:

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

Man sieht jetzt, daß man ganz einfach alle Terme die y enthalten auf eine, und alle Terme die x enthalten auf die andere Seite bringen kann:

$$\frac{dy}{y} = k\,dx \qquad \text{(A)}$$

Sobald man diese Umformung durchgeführt hat, kann man linke und rechte Seite integrieren, d.h.

$$\int \frac{dy}{y} = k \int dx$$

$$\ln y = k\,x + \tilde{c}.$$

Im letzten Schritt wurden wieder die Integrationskonstanten von linker und rechter Seite zu $\tilde{c}$ zusammengefaßt. Um auf die Form "$y =$" zu kommen, wenden wir die Exponentialfunktion auf beide Seiten an und erhalten:

$$y = e^{k\,x+\tilde{c}} = e^{\tilde{c}}e^{k\,x} = Ce^{kx} \tag{7}$$

Um sich den unhandlichen Faktor $e^{\tilde{c}}$ zu ersparen, führt man kurzer Hand die neue Konstante $C = e^{\tilde{c}}$ ein.

DGL erster Ordnung, bei denen wie in Schritt (A) alle x enthaltenden Faktoren auf die eine, alle y enthaltenden Faktoren auf die andere Seite gebracht werden können heißen *separierbar*.

Gleichungen vom Typ Gl. 6 sind von äußerster Wichtigkeit in Chemie und Biologie. Die Geschwindigkeit einer (bio)chemischen Reaktion (d.h. die Ableitung der Konzentration c nach der Zeit t, $\frac{dc}{dt}$) oder die Änderung der Größe einer Population P mit der Zeit ($\frac{dP}{dt}$) sind oft (in erster Näherung) der Konzentration bzw. Population proportional. Durch einfaches Umbenennen der Variablen erhält man aus Gl. 6

$$\frac{dP(t)}{dt} = k\,P(t),$$

was besagt, daß die Änderungsrate der Population zu einem bestimmten Zeitpunkt t, $\frac{dP}{dt}$, von der Größe der Population zu diesem Zeitpunkt abhängt. Die Lösung der Gleichung ist Gl. 7, d.h.

$$P(t) = Ce^{k\,t}.$$

Eine vernünftige Anfangsbedingung ist jetzt zum Beispiel die Forderung, daß die Population zum Zeitpunkt $t = 0$ (dem Beginn der Beobachtung) 1.000 Stück betragen hat. Durch Einsetzen dieser Bedingung $P(0) = 1.000$ findet man die spezielle Lösung

$$P(t) = 1.000 \times e^{k\,t}.$$

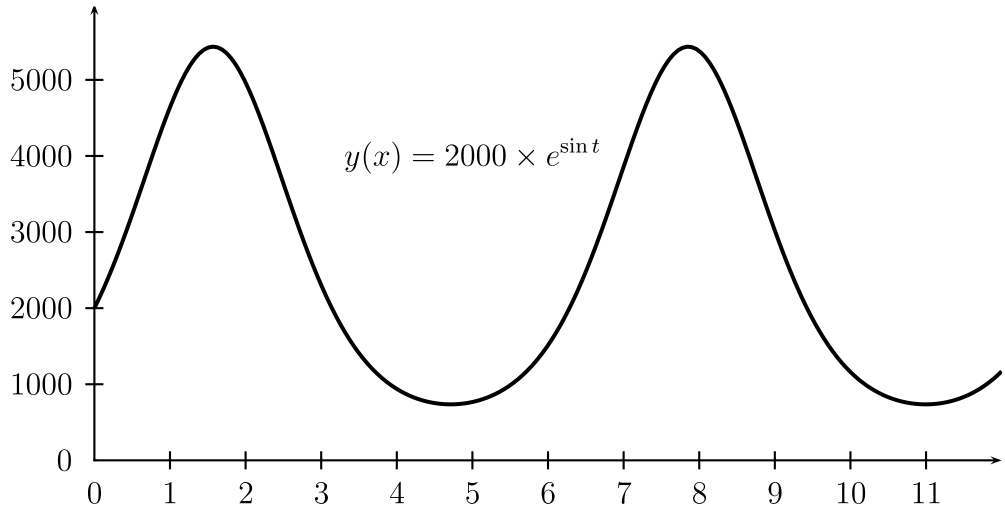

Abbildung 2: Grafische Darstellung der Lösung der DGL $\frac{dP}{dt} = kP\cos(rt)$ für den Fall $k = r = 1$. P_0 wurde auf 2,000 gesetzt.

Nun wissen Sie, daß Wachstum einer Population selten in eine Richtung geht. Ein Versuch, zyklisches Verhalten zu modellieren besteht darin, $P(t)$ mit einer oszillierenden Funktion, z.B. einer Winkelfunktion zu "modulieren". Die resultierende DGL

$$\frac{dP}{dt} = k\,P\,\cos(rt) \tag{8}$$

ist noch immer linear in P und $P' = \frac{dP}{dt}$, und der Faktor $\cos(rt)$ ändert auch nichts an der Separierbarkeit. Wir bekommen jetzt

$$\frac{dP}{P} = k\cos(rt)dt$$
$$\int \frac{dP}{P} = k\int \cos(rt)dt$$
$$\ln P = k\frac{1}{r}\sin(rt) + \tilde{c}$$
$$P = C\exp\left(\frac{k}{r}\sin(rt)\right)$$

Beachten Sie, daß sich an den Rechenschritten nichts geändert hat, nur das Integral auf der rechten Seite ist ein bißchen komplizierter geworden. Formuliert man diesmal die AB allgemeiner als $P(t=0) = P_0$, so erhält man als spezielle Lösung

$$P(t) = P_0 \times \exp\left(\frac{k}{r}\sin(rt)\right)$$

Ich empfehle Ihnen, als Übung eine Kurvendiskussion der Lösungsfunktion durchzuführen, die in Abbildung 2 dargestellt ist. Als weitere Übungsaufgabe lösen Sie die DGL

$$\frac{dP}{dt} = k\,P\,\cos^2(rt)$$

und vergleichen Sie das Verhalten der Lösung mit der Lösung von (8).

2.1.2 Nichtlineare, separierbare DGL

Eine separierbare DGL muß nicht einmal linear sein. (DGL 1. Ordnung stellen insofern eine Ausnahme dar, als in diesem Fall auch viele nichtlineare DGL allgemein lösbar sind.) Sei

$$y' = \frac{dy}{dx} = h(y)g(x) \tag{9}$$

Da wir noch immer nach y und x auftrennen können, erhalten wir sofort

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx,$$

welches sofort allgemein gelöst werden kann:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C \tag{10}$$

▶ **Beispiel:** Gesucht sei die Lösung der DGL

$$y' = \sqrt{y}\cos x$$

mit AB $y(0) = 1$.

Trennung der Variablen ergibt

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \cos x\, dx$$

und durch Integration finden wir

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2y^{1/2} = \int \cos x\, dx = \sin x + \tilde{c}$$

oder

$$y = \left(\frac{1}{2}\sin x + C\right)^2$$

Einsetzen der AB ergibt $y(0) = 1 = C^2$, somit ist

$$y = \left(\frac{1}{2}\sin x + 1\right)^2$$

die gewünschte spezielle Lösung (NB: $C = -1$ ist auch eine Lösung!). *Machen Sie zur Übung die Probe!!* ◀

2.2 Inhomogene, lineare DGL 1. Ordnung

Die inhomogene, lineare DGL 1. Ordnung hat die allgemeine Form

$$b_1(x)y'(x) + b_0(x)y(x) = g(x).$$

Division durch $b_1(x)$

$$y'(x) + \frac{b_0(x)}{b_1(x)}y(x) = \frac{g(x)}{b_1(x)}$$

führt auf die Standardform

$$y'(x) + a_1(x)y(x) = h(x) \tag{11}$$

(vgl. Gl. 5). Ist $h(x) = 0$, so spricht man von einer *homogenen*, ansonsten von einer *inhomogenen*, linearen DGL 1. Ordnung.

Der homogene Fall bietet nichts Neues, denn einfaches Umformen führt auf

$$y' = -a_1(x)y.$$

Dies ist aber eine (lineare) separierbare Gleichung. Unter diesem Gesichtspunkt sind Gleichungen 6 und 8 natürlich auch homogene, lineare DGL 1. Ordnung.

2.2.1 Theorie: Überlegungen zur Natur der Lösung der inhomogenen Gleichung

Im allgemeinen, inhomogenen Fall ist eine Trennung der Variablen jedoch nicht möglich (das sieht man sofort wenn man Gl. 11 auf die Form

$$y' = -a_1(x)y + h(x)$$

bringt). Bevor wir uns ansehen, wie man in der Praxis die Lösung der inhomogenen Gleichung findet, sollten wir uns kurz den Kopf über die Natur dieser Lösung zerbrechen. Nehmen wir einmal an, wir hätten (wie auch immer) *zwei* Lösungen der inhomogenen Gleichung 11, $y_1(x)$ und $y_2(x)$ gefunden. Damit sind folgende beide Gleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} y_1'(x) + a_1(x)y_1(x) &= h(x) \\ y_2'(x) + a_1(x)y_2(x) &= h(x) \end{aligned}$$

Zieht man die zweite von der ersten der beiden Gleichungen ab, so erhält man

$$\underbrace{(y_1'(x) - y_2'(x))}_{\Delta y'(x)} + a_1(x)\underbrace{(y_1(x) - y_2(x))}_{\Delta y(x)} = 0$$

Zunächst sieht man, daß die Differenz der beiden Lösungen $\Delta y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ eine Lösung der homogenen DGL $y'(x) + a_1(x)y(x) = 0$ ist. Das bedeutet aber gleichzeitig, daß ich auch schreiben kann

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \Delta y(x) + y_2(x) \\ y_2(x) &= -\Delta y(x) + y_1(x) \end{aligned}$$

Das heißt aber jetzt, daß ich z.B. durch meine zweite Lösung der inhomogenen Gleichung y_2 nicht mehr komplett neue Information gewonnen habe, denn z.B. läßt sich y_2 additiv aus einer Lösung der homogenen Gleichung $\Delta y = y_H$ und y_1 zusammensetzen.

Folglich besteht die allgemeinste Lösung von DGL (11) aus der allgemeinen Lösung y_H der entsprechenden homogenen Gleichung

$$y_H'(x) + a_1(x)y_H(x) = 0, \tag{12}$$

und der sogenannten *partikulären* Lösung y_P, die die inhomogene Gleichung erfüllt. Weiters, wenn y_H eine Lösung der homogenen Gleichung 12 ist, so ist auch $C \times y_H$, $C \in \mathbb{R}$ (oder sogar $C \in \mathbb{C}$) eine Lösung von (12). Diese Konstante C ist die Integrationskonstante, die man beim Lösen der separierbaren, homogenen Gleichung automatisch bekommt. Zusammenfassend ist die Lösung von (11) durch

$$y = Cy_H + y_P \tag{13}$$

gegeben. Da wir entsprechend unserer Überlegung nur irgendeine partikuläre Lösung brauchen, genügt es auch die Integrationskonstante in der Lösung der homogenen Gleichung zu berücksichtigen. Der Lösungsweg für inhomogene, lineare DGL 1. Ordnung besteht also aus dem Lösen der homogenen Gleichung, welche separierbar und damit ohne Probleme lösbar ist, und dem Finden einer partikulären Lösung.

2.2.2 Praxis: Lösung durch Variation der Konstanten

Die gesuchte partikuläre Lösung y_P läßt sich *immer* durch eine Methode finden, die als *Variation der Konstanten* bezeichnet wird. Sie läßt sich am besten durch ein Beispiel illustrieren. Gesucht ist die Lösung der Gleichung:

$$y' + ky = x^2$$

Diese Gleichung ist insofern speziell als der Faktor $a_1(x) = k$ eine Konstante ist, man spricht auch von einer inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung mit *konstanten Koeffizienten.* Die Lösung der homogenen Gleichung $y' + ky = 0$ ist wie man sich unschwer überzeugen kann durch

$$y_H = Ce^{-kx}$$

gegeben.

Die Integrationskonstante C wird nun in eine Funktion $C(x)$ "verwandelt", *daher auch der Name "Variation der Konstanten"*. Der Ansatz für die Variation der Konstanten lautet daher

$$y_P = C(x)e^{-kx}. \tag{14}$$

Mit $y_P' = C'(x)e^{-kx} - kC(x)e^{-kx}$ erhält man nach Einsetzen und Vereinfachen in die inhomogene Gleichung folgende DGL für $C(x)$

$$y_P' + k\,y_P = \underbrace{C'(x)e^{-kx} - kC(x)e^{-kx}}_{y_P'} + k\,\underbrace{C(x)e^{-kx}}_{y_P} = C'(x)e^{-kx} = x^2.$$

$$C'(x) = x^2 e^{kx}$$

Das Wegheben der Terme mit $C(x)$ ist kein Zufall, im Gegenteil: Wenn sie sich nicht wegheben, dann liegt ein Rechenfehler vor!! Man findet (durch zweimalige partielle Integration oder Integraltafel)

$$C(x) = \int dx\, x^2 e^{kx} = e^{kx}\left(\frac{x^2}{k} - \frac{2x}{k^2} + \frac{2}{k^3}\right)$$

und somit für

$$y_P = C(x)e^{-kx} = \frac{x^2}{k} - \frac{2x}{k^2} + \frac{2}{k^3}$$

Die komplette Lösung der DGL ist daher

$$y = y_H + y_P = Ce^{-kx} + \frac{x^2}{k} - \frac{2x}{k^2} + \frac{2}{k^3}$$

Wenn man konstante Koeffizienten a_1 und a_0 hat, kann man die Variation der Konstanten durch "kreatives Raten" ersetzen. Diese Technik ist bei linearen DGL mit konstanten Koeffizienten höherer Ordnung sehr wichtig (siehe unten), weil sie im Vergleich zur — auch dort möglichen — Variation der Konstanten deutlich weniger Rechenaufwand bedingt. Bei Gleichungen erster Ordnung ist der Zeitgewinn nicht so groß, aber es ist eine gute Gelegenheit um das Prinzip kennenzulernen.

In unserem Beispiel ist die Inhomogenität $h(x) = x^2$ (man bezeichnet $h(x)$ auch als *Störfunktion*). Man vermutet daher, daß eine partikuläre Lösung die Form $y_P = ax^2 + bx + c$ haben könnte, wobei a, b und c durch Koeffizientenvergleich in folgender Weise bestimmt werden. Wir haben

$$\begin{aligned} y_P &= ax^2 + bx + c \\ y_P' &= 2ax + b \end{aligned}$$

Damit setzen wir in die DGL ein:

$$\underbrace{2ax + b}_{y_P'} + k(\underbrace{ax^2 + bx + c}_{y_P}) = x^2$$

Nach dem Ausmultiplizieren der linken Seite und Ordnen der Terme nach Potenzen von x findet man

$$\underbrace{ka}_{1}\, x^2 + \underbrace{(2a + kb)}_{0}\, x + \underbrace{(b + ck)}_{0} = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$$

Durch Vergleich der Vorfaktoren von x^2 auf linker und rechter Seite folgt, daß

$$ka = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{k}.$$

Auf der rechten Seite kommt weder x noch eine Konstante vor, daher muß $2a + kb = 0$ und $b + ck = 0$ gelten. Da wir a schon kennen, findet man unschwer $b = -\frac{2}{k^2}$ und $c = \frac{2}{k^3}$. Durch Rückeinsetzen erhalten wir

$$y_p = \frac{1}{k}x^2 - \frac{2}{k^2}x + \frac{2}{k^3},$$

dasselbe Ergebnis wie mit Variation der Konstanten. Unbestimmte Ansätze für vielerlei Störfunktionen findet man in Formelsammlungen meist im Kapitel "Inhomogene DGL 2. (oder höherer) Ordnung mit konstanten Koeffizienten". *Wichtig:* Der unbestimmte Ansatz funktioniert nur bei konstanten Koeffizienten, während Variation der Konstanten immer geht!

▶ **Ein weiteres Beispiel:** Da inhomogene lineare DGL 1. Ordnung weit verbreitet sind, kann ein zweites Beispiel nicht schaden. Gesucht ist die Lösung der DGL

$$xy' + (1-x)y = x^2$$

bzw. (in Standardform)

$$y' + \frac{1-x}{x}y = x.$$

Die Lösung der homogenen Gleichung $xy' + (1-x)y = 0$ ist

$$y_H = Ce^{x-\ln x} = C\frac{e^x}{x}$$

(*Zur Übung Nachrechnen!!*).

Da es sich hier nicht *um eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten wie im ersten Beispiel handelt, kann hier nur Variation der Konstanten angewandt werden.* Wir verwenden also den Ansatz Gl. 14 $y_P = C(x)y_H$, d.h. für unser Beispiel $y_P = C(x)\frac{e^x}{x}$. Setzt man mit diesem y_P und $y_P' = C'(x)e^{x-\ln x} + C(x)e^{x-\ln x}(1-\frac{1}{x})$ in die DGL ein, erhält man

$$\underbrace{x\left[C'(x)e^{x-\ln x} + C(x)e^{x-\ln x}(1-\frac{1}{x})\right]}_{y_P'} + (1-x)\underbrace{C(x)e^{x-\ln x}}_{y_P} = x^2$$

$$xC'(x)e^{x-\ln x} = x^2$$

Nochmals: Daß sich die Terme mit $C(x)$ wegheben, muß so sein. Wenn sie sich nicht wegheben, ist vorher ein Rechenfehler passiert!! Weiteres Vereinfachen führt auf eine DGL 1. Ordnung in $C(x)$, d.h. $C(x)$ ist jetzt die gesuchte Funktion.

$$C'(x)e^{x-\ln x} = x$$
$$C'(x) = x^2e^{-x}$$

Die Gleichung ist direkt integrierbar, und mit Hilfe einer Formelsammlung oder partieller Integration erhält man

$$C(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2).$$

Somit ist

$$y_p(x) = C(x)\frac{e^x}{x} = -\frac{x^2 + 2x + 2}{x}$$

und die allgemein(st)e Lösung der inhomogenen DGL ist durch

$$y = y_H + y_P = C\frac{e^x}{x} - \frac{x^2 + 2x + 2}{x}$$

gegeben. Soweit die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL. Wie immer kann es auch eine AB geben, z.B. $y(x = 2) = 5$, d.h.,

$$y(x = 2) = 5 = C\frac{e^2}{2} - 5,$$

woraus man sofort $C = 20/e^2$ findet. Die spezielle Lösung, die dieser AB genügt lautet daher

$$y = 20\frac{e^{x-2}}{x} - \frac{x^2 + 2x + 2}{x}$$

◀

Eine abschließende Bemerkung. Da inhomogene, lineare DGL 1. Ordnung immer gelöst werden können, findet man in vielen Lehrbüchern und allen Formelsammlungen kompakte Ausdrücke der Form

$$y(x) = \frac{1}{p(x)}\int p(x)h(x)dx + \frac{C}{p(x)},$$

mit

$$p(x) = \exp[\int dx\, a_1(x)].$$

Wenn Sie "Fertigformeln" dieser Art vorziehen, dann müssen Sie sich unbedingt vertraut machen, was die einzelnen Symbole heißen. Persönlich ziehe ich die schrittweise Methode vor, weil man u.U. während der Variation der Konstanten noch auf den einen oder anderen Fehler draufkommt (z.B. Terme mit $C(x)$ fallen nicht weg).

3 Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

3.1 Einige allgemeine Bemerkungen zu linearen DGL beliebiger Ordnung

Wie eben gezeigt, können inhomogene, lineare DGL 1. Ordnung immer in allgemeiner und systematischer Weise gelöst werden. Für lineare DGL höherer Ordnung ist dies nicht mehr der Fall (zumindest werden die Verfahren um einiges komplizierter). Wir werden uns daher im Detail nur mit einem wichtigen Spezialfall, der linearen DGL 2. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten beschäftigen. Bevor wir uns diesem Typus von Gleichung zuwenden, sollten aber doch ein paar allgemeine Ergebnisse (ohne Beweis) über die Natur der allgemeinen Lösung einer linearen DGL n-ter Ordnung nicht fehlen.

Bei der inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung konnten wir uns überzeugen, daß sich die allgemeinste Lösung aus der Lösung der homogenen Gleichung, die einen unbestimmten multiplikativen Faktor (die Integrationskonstante) enthält, plus einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung zusammensetzt (s. Gleichung 13). Die allgemeinste inhomogene lineare Gleichung n-ter Ordnung hat die Form (siehe (5))

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = h(x), \tag{15}$$

die zugeordnete homogene Gleichung ist

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = 0. \tag{16}$$

Betrachten wir den Spezialfall

$$y^{(n)} = 0,$$

d.h. alle $a_i(x)$ verschwinden. Durch n-maliges Integrieren findet man sofort

$$y = \frac{\tilde{c}_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{\tilde{c}_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \ldots + \tilde{c}_{n-1}x + \tilde{c}_n = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_{n-1}x + c_n.$$

Im inhomogenen Fall

$$y^{(n)} = h(x)$$

erhält man analog

$$y = \underbrace{c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + c_{n-1}x + c_n}_{y_H} + \underbrace{\int dx \left(\int dx \left(\ldots \int dx\, h(x)\right)\right)}_{y_P}.$$

Die multiplen Integrale repräsentieren die n-malige Integration des Störterms $h(x)$. Man sieht sofort, daß sich wie bei Gleichungen 1. Ordnung die Lösung der inhomogenen Gleichung aus der Lösung der homogenen Gleichung plus einer partikulären Lösung zusammensetzt. Weiters besteht die homogene Lösung y_H aus n Termen, die n multiplikativen Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ (die Integrationskonstanten) enthalten.

Die Betrachtung dieses Spezialfalls legt folgende Schlußfolgerung bezüglich der Lösungsgesamtheit von inhomogenen linearen DGL n-ter Ordnung nahe — der Beweis liegt außerhalb des Rahmens dieser Lehrveranstaltung und Ihrer Vorkenntnisse. *Auf jedem Intervall I, auf dem die Koeffizienten $a_i(x)$ der DGL Gl. 15 stetig sind, hat (15) eine stetige Lösung der Form*

$$y = y_H + y_P = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x) + y_P \tag{17}$$

die n unabhängige Konstanten c_i enthält. Es gibt keine weitere Lösung auf I, die nicht aus (17) durch Spezialisierung der Konstanten gewonnen werden könnte. Jedes $u_i(x)$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung 16 und von allen anderen $u_{j\neq i}(x)$ linear unabhängig*, d.h., die Beziehung*

$$\alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) + \ldots + \alpha_n u_n(x) = 0$$

zwischen den $u_i(x)$ wird nur durch die triviale Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ erfüllt. Da die allgemeine Lösung (17) n Konstanten enthält, sind zu deren Festlegung n AB notwendig.

Aus dem eben Gesagten ist klar, daß der prinzipielle Lösungsvorgang für inhomogene lineare DGL höherer Ordnung völlig analog zum Vorgehen bei linearen DGL erster Ordnung ist: Zuerst muß die homogenen Gleichung 16 gelöst werden, danach sucht man eine partikuläre Lösung. Hat man alle n homogenen Lösungen $u_i(x)$, dann kommt man durch Variation der Konstanten (im Prinzip) immer auf eine partikuläre Lösung (in der Praxis führt das Verfahren jedoch sehr rasch auf komplizierte Integrale). *Im Gegensatz zu linearen Gleichungen 1. Ordnung gibt es jedoch kein allgemeines Verfahren zum Finden der homogenen Lösungen.* Für allgemeine, lineare homogene DGL höherer Ordnung (auch schon 2. Ordnung!) besteht daher die Hauptschwierigkeit im Finden der homogenen Lösung, wobei der Schlüsselschritt im Finden der *ersten* homogenen Lösung besteht. Hat man nämlich einmal eine homogene Lösung $u_1(x)$ einer linearen DGL n-ter Ordnung, kann man durch den Ansatz $y = v(x)u_1(x)$ auf eine neue Differentialgleichung der Ordnung $n-1$ in $w(x) = v'(x)$ kommen. Dieses Verfahren wird als *Reduktion der Ordnung* bezeichnet. Die Details von Variation der Konstanten als auch von Reduktion der Ordnung sind nicht Vorlesungsstoff. Reduktion der Ordnung werden wir im nächsten Abschnitt auf einen Spezialfall anwenden, Kap. 3.3.2 illustriert die Variation der Konstanten an einem Beispiel.

3.2 Homogene Gleichung

Nach dieser allgemeinen Einführung wenden wir uns einem wichtigen Spezialfall, der *linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten* zu:

$$y'' + py' + qy = h(x) \tag{18}$$

Im Rahmen dieser Lehrveranstaltung beschränken wir uns auf den Fall $p, q \in \mathbb{R}$, komplexe Koeffizienten könnten jedoch völlig analog behandelt werden. Aus den eben gegebenen allgemeinen Erläuterungen folgt, daß wir zunächst die homogene Gleichung

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{19}$$

lösen müssen.

3.2.1 Charakteristische Gleichung

Der Schlüsselschritt zur Lösung der homogenen Gleichung liegt im Ansatz

$$y = e^{\lambda x}, \tag{20}$$

da jede Ableitung von y ein konstantes vielfaches der Funktion ist. Mit $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ erhält man

$$\underbrace{\lambda^2 e^{\lambda x}}_{y''} + p\underbrace{\lambda e^{\lambda x}}_{y'} + q\underbrace{e^{\lambda x}}_{y} = 0$$

Da die Exponentialfunktion nie Null werden kann, darf man durchkürzen und erhält die sogenannte *charakteristische Gleichung* (auch *charakteristisches Polynom*),

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{21}$$

welches eine quadratische Gleichung in λ ist. Die Lösung von (21) für $p, q \in \mathbb{R}$

$$ {}_1\lambda_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} $$

kann je nach Wert der Diskriminante $D = p^2/4 - q$ zwei relle Zahlen, zwei komplexe Zahlen, oder eine zusammenfallende reelle Lösung sein. Diese drei Fälle diskutieren wir an Hand von Beispielen getrennt in den folgenden Unterabschnitten.

Durch den Ansatz $y = e^{\lambda x}$ können lineare DGL mit konstanten Koeffizienten *beliebiger* Ordnung gelöst werden, vorausgesetzt man findet die Nullstellen des entstehenden charakteristischen Polynoms n-ter Ordnung.

3.2.2 Fall I: Zwei reelle Lösungen

Die Gleichung

$$ y'' + y' - 6y = 0 $$

hat die charakteristische Gleichung[2]

$$ \lambda^2 + \lambda - 6 = 0, $$

welche die Lösung

$$ \lambda_1 = +2, \qquad \lambda_2 = -3 $$

hat. Damit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung durch

$$ y = Ae^{2x} + Be^{-3x} $$

gegeben.

Da es zwei Konstanten gibt, muß es zwei AB geben. Es sei zum Beispiel $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$. Mit $y' = 2Ae^{2x} - 3Be^{-3x}$ erhält man aus diesen AB ein Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit zwei Variablen (0. Übungsblatt!).

$$ \begin{aligned} y(0) = 1 &= A + B \quad | \cdot 2 \\ y'(0) = 0 &= 2A - 3B \quad | \cdot (-1) \end{aligned} $$

Eliminieren von A (wie angedeutet) führt auf $B = 2/5$ und Einsetzen von B in die erste oder zweite Gleichung gibt $A = 3/5$. Die spezielle Lösung für diese AB ist daher

$$ y = \frac{3}{5}e^{2x} + \frac{2}{5}e^{-3x}. $$

3.2.3 Fall II: Zwei komplexe Lösungen

Die Gleichung

$$ y'' - 6y' + 13y = 0 $$

hat die charakteristische Gleichung

$$ \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0, $$

welche die Lösung

$$ \lambda_1 = 3 + 2i, \qquad \lambda_2 = 3 - 2i $$

[2] Der Zwischenschritt $\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} - 6e^{\lambda x} = 0$ ist so selbstverständlich, daß er in der Praxis weggelassen wird.

hat. Damit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung durch

$$y = Ae^{(3+2i)x} + Be^{(3-2i)x} = e^{3x}\left(Ae^{2ix} + Be^{-2ix}\right)$$

gegeben.

Im Prinzip sind wir hiermit fertig, die komplexe Exponentialfunktion indiziert allerdings Umformung in Winkelfunktionen nach dem Satz von Moivre $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Unter temporärer Weglassung des Faktors e^{3x}, lässt sich der Inhalt der Klammer auch als

$$A(\cos(2x) + i\sin(2x)) + B(\cos(-2x) + i\sin(-2x)) =$$

$$A(\cos(2x) + i\sin(2x)) + B(\cos(2x) - i\sin(2x)) =$$

$$\underbrace{[A + B]}_{C}\cos(2x) + \underbrace{i[A - B]}_{D}\sin(2x)$$

schreiben. Da die Konstanten A und B keinerlei Einschränkung unterliegen, lassen wir zu, daß sie komplex sind, verlangen aber, daß $C = A + B$ und $D = i(A - B)$ reell sind. (Daß dies möglich ist, sieht man durch auflösen der Definitionen von C und D nach A und B, man findet (*überprüfen Sie das!*) $A = \frac{C-iD}{2}$, $B = \frac{C+iD}{2}$.

Die Lösung unseres Beispiels läßt sich daher auch in der Form

$$y = e^{3x}\left(C\cos(2x) + D\sin(2x)\right)$$

schreiben.

Erhalten Sie also als Lösung einer charakteristischen Gleichung zwei komplexe Lösungen, ${}_1\lambda_2 = \alpha \pm i\beta$, so können Sie die Lösung der DGL sofort in der Form

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)\right)$$

schreiben. Das Einsetzen von AB erfolgt völlig analog dem Fall zweier reeller Lösungen, konkrete Beispiele siehe Übungsblätter des Vorjahrs, und aktuelle Übungszettel.

3.2.4 Fall III: Eine zusammenfallende reelle Lösung

Die Gleichung

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

hat die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,$$

welche die zusammenfallende reelle Lösung

$$\lambda = 3$$

hat. Wir haben daher als Lösung der DGL

$$y = Ae^{3x} = y_1,$$

wissen aber aus der Theorie (Abschnitt 3.1), daß es noch eine zweite Lösung geben muß.

Man hat in diesem Fall mehrere Möglichkeiten, die fehlende zweite Lösung zu finden. Wir nützen die Gelegenheit, um die Methode der Reduktion der Ordnung an einem ganz einfachen Fall zu illustrieren. Wie in Abschnitt 3.1 erläutert, verwendet man den Lösungsansatz

$$y_2 = v(x)y_1(x) = v(x)e^{3x}.$$

Erste und zweite Ableitung dieses Ansatzes sind $y' = v'(x)e^{3x}+3v(x)e^{3x}$, $y'' = v''(x)e^{3x}+6v'(x)e^{3x}+9v(x)e^{3x}$. Einsetzen in die DGL ergibt

$$\underbrace{v''(x)e^{3x} + 6v'(x)e^{3x} + 9v(x)e^{3x}}_{y''} - 6(\underbrace{v'(x)e^{3x} + 3v(x)e^{3x}}_{y'}) + 9\underbrace{v(x)e^{3x}}_{y} = 0$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich zu

$$v''(x)e^{3x} = 0,$$

was wie in Abschnitt 3.1 behauptet tatsächlich eine Differentialgleichung 1. Ordnung in $w = v'(x)$ ist

$$w'(x)e^{3x} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad w'(x) = 0.$$

Durch direkte Integration findet man

$$w(x) = v'(x) = C$$

und somit

$$v(x) = Cx + D.$$

Damit finden wir als zweite Lösung

$$y_2(x) = v(x)e^{3x} = (Cx + D)e^{3x}.$$

Einen Teil dieser Lösung, De^{3x}, kennen wir bereits, der zweite Teil, Cxe^{3x}, ist jedoch die gesuchte, linear unabhängige zweite Funktion, die eine Lösung der homogenen DGL ist.

Die vollständige Lösung der DGL unseres Beispiels ist also

$$y = y_1 + y_2 = Ae^{3x} + Bxe^{3x}.$$

Der besseren Verständlichkeit wegen wurde die Ableitung an einem konkreten Beispiel durchgeführt. Die Rechnung kann aber auch allgemein geführt werden und es gilt: Die lineare DGL mit konstanten Koeffizienten der Form

$$y'' + 2ry' + r^2y = 0$$

mit zusammenfallendem $\lambda = -r$ der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + 2r\lambda + r^2 = (\lambda + r)^2 = 0$ hat die allgemeine Lösung

$$y = Ae^{-rx} + Bxe^{-rx}.$$

Unser spezielles Beispiel entspricht dem Fall $r = -3$.

3.3 Inhomogene Gleichung

3.3.1 Unbestimmter Ansatz und Koeffizientenvergleich

Für reelle Koeffizienten p, q in Gleichung 18 haben wir jetzt alle möglichen Fälle, die beim Lösen der homogenen Gleichung auftreten können, besprochen. Bei linearen DGL mit konstanten Koeffizienten wird zum Suchen einer partikulären Lösung bevorzugt die Methode des unbestimmten Ansatzes mit darauffolgendem Koeffizientenvergleich herangezogen. Die unbestimmten Ansätze sind in allen gängigen Formelsammlungen tabelliert, z.B. im "kleinen Bartsch" siehe das Flußdiagramm und Erläuterungen auf den Seiten 180f. ACHTUNG: *Alle derartige Tabellen sind mit* Sorgfalt *zu verwenden, denn der zu verwendende Ansatz kann von der homogenen Lösung abhängen!*

Wir beginnen mit einem ersten, völlig ausgearbeiteten Beispiel. Danach folgen ein paar allgemeine Bemerkungen, illustriert durch weitere Beispiele (bei denen die Rechenschritte allerdings nur skizziert sind). Nach diesen Beispielen schließen wir das Kapitel mit einer kurzen Bemerkung zu komplizierteren Fällen, und einem Trick, der in manchen Fällen viel Rechenarbeit ersparen kann. Ein zusätzliches Beispiel finden Sie im Abschnitt 3.3.2, wo die Methode des unbestimmten Ansatzes zur Überprüfung des durch Variation der Konstanten ermittelten Ergebnisses verwendet wird.

► Gesucht ist die Lösung der DGL

$$y'' + y' - 2y = x^2$$

mit den AB $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Aus der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

findet man mit

$$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = 1$$

als allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_H = Ae^x + Be^{-2x}$$

Da die Störfunktion $h(x) = x^2$ ein Polynom zweiten Grades ist, so liegt die Vermutung nahe, daß die gesuchte partikuläre Lösung auch ein Polynom 2. Grades ist. Wir verwenden daher den unbestimmten Ansatz

$$y_P = ax^2 + bx + c$$

mit Ableitungen $y'_P = 2ax + b$, $y''_P = 2a$. Einsetzen in die DGL führt zu

$$\underbrace{2a}_{y''_P} + \underbrace{2ax + b}_{y'_P} - 2(\underbrace{ax^2 + bx + c}_{y_P}) = x^2$$

Vereinfachen und sortieren der Terme nach Potenzen von x ergibt

$$\underbrace{-2a}_{1}\, x^2 + (\underbrace{2a - 2b}_{0})x + (\underbrace{2a + b - 2c}_{0}) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0,$$

woraus man durch Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2a &= 1 \\ 2a - 2b &= 0 \\ 2a + b - 2c &= 0 \end{aligned}$$

findet. Dieses hat die Lösung

$$a = -\frac{1}{2} \qquad b = -\frac{1}{2} \qquad c = -\frac{3}{4}$$

und somit lautet die gesuchte partikuläre Lösung

$$y_P = -\frac{1}{2}(x^2 + x + \frac{3}{2}).$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y = y_H + y_P = Ae^x + Be^{-2x} - \frac{1}{2}(x^2 + x + \frac{3}{2}).$$

Zu guter letzt müssen wir noch die AB berücksichtigen (*diese müssen mit der vollständigen, nicht bloß mit der homogenen Lösung ermittelt werden!*). Wir brauchen neben der Funktion y selbst die Ableitung der Lösung, $y' = Ae^x - 2Be^{-2x} - x - 1/2$. Mit

$$y(0) = 0 = A + B - \frac{3}{4}$$

$$y'(0) = 0 = A - 2B - \frac{1}{2}$$

findet man nach kurzer Rechnung $A = 2/3$ und $B = 1/12$. Die spezielle Lösung, die den AB genügt, ist also:

$$y = \frac{2}{3}e^x + \frac{1}{12}e^{-2x} - \frac{1}{2}(x^2 + x + \frac{3}{2}).$$

◀

Die Grundidee aller unbestimmten Ansätze ist: *Der Ansatz $y_P(x)$ muß alle Funktionen enthalten, die in der Störfunktion $h(x)$ vorkommen bzw. aus dieser durch Differentiation entstehen.* In obigem Beispiel war $h(x) = x^2$. Der Ansatz $y_P = \beta x^2$ (mit β als zu bestimmender Konstante) reicht allerdings nicht aus, denn durch Differentiation entstehen ja die Ableitungen $y_p' = 2\beta x$, $y_p'' = 2\beta$. Daher ist der richtige Ansatz das vollständige Polynom 2. Ordnung $y_P = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$, der auch im obigen Beispiel verwendet wurde. Diese Überlegung führt auf folgende, *vorläufige* Tabelle (s. Seite 18) von unbestimmten Ansätzen. Die Notwendigkeit, nicht nur die unmittelbar in $h(x)$ auftretende Funktion

$h(x)$	$y_P(x)$
$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$	$\beta_n x^n + \beta_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$
$\alpha \exp(cx)$	$\beta \exp(cx)$
$\alpha \cos(cx)$	$\beta_1 \cos(cx) + \beta_2 \sin(cx)$
$\alpha \sin(cx)$	$\beta_1 \cos(cx) + \beta_2 \sin(cx)$
$\alpha_1 \cos(cx) + \alpha_2 \sin(cx)$	$\beta_1 \cos(cx) + \beta_2 \sin(cx)$
$\alpha \exp(cx) \cos(dx)$	$\exp(cx)\,(\beta_1 \cos(dx) + \beta_2 \sin(dx))$
$\alpha \exp(cx) \sin(dx)$	$\exp(cx)\,(\beta_1 \cos(dx) + \beta_2 \sin(dx))$
$\exp(cx)\,(\alpha_1 \cos(dx) + \alpha_2 \sin(dx))$	$\exp(cx)\,(\beta_1 \cos(dx) + \beta_2 \sin(dx))$

Tabelle 1: *Vorläufige* Zusammenstellung von unbestimmten Ansätzen y_P als Funktion der Störfunktion $h(x)$. *Die hier angegebenen Ansätze funktionieren nicht, wenn y_P bereits Lösung der homogenen Gleichung ist, in diesem Fall ist diese Tabelle um die im Text auf Seite 19 angegebene* **Regel** *zu ergänzen.* Die α_i sind die in der Störfunktion auftretenden Konstanten, und die β_i sind die entsprechenden, durch Koeffizientenvergleich zu bestimmenden Konstanten. Die Konstanten c und d sind in $h(x)$ und $y_P(x)$ gleich.

zu verwenden, sieht man z.B. auch im Fall $h(x) = \sin(cx)$ bzw. $h(x) = \cos(cx)$. Da durch die erste Ableitung ein Cosinus (Sinus) auftritt, muß der Ansatz die allgemeinere Funktion $y_P = \beta_1 \sin(cx) + \beta_2 \cos(cx)$ sein (dritter und vierter Eintrag in Tabelle 1). Die Konstante c im Argument des Sinus (Cosinus) muß natürlich im unbestimmten Ansatz das gleiche wie in der Störfunktion sein.

Als Beispiel betrachten wir

$$y'' + y = \sin(3x) \qquad \text{(A)}$$

Diese Gleichung hat die Lösung der charakteristischen Gleichung ${}_2\lambda_1 = \pm i$, und somit $y_H = A \sin x + B \cos x$. Aus Tabelle 1 folgt als unbestimmter Ansatz für die partikuäre Lösung $y_P = \beta_1 \sin(3x) + \beta_2 \cos(3x)$.[3]

[3]Da weder $\sin(3x)$ noch $\cos(3x)$ eine Lösung der zu (A) homogenen Gleichung $y'' + y = 0$ sind, gibt es kein Problem, und der Ansatz kann in dieser Form verwendet werden, siehe die folgende Diskussion.

Die in Tabelle 1 angegebenen Ansätze sind (wie erwähnt) mit Sorgfalt zu verwenden, denn Probleme entstehen wenn der aus Tabelle 1 folgende Ansatz y_P bereits eine Lösung y_H der homogenen Gleichung ist. (In der Praxis sieht man dies sofort, denn beim Einsetzen des (in einem solchen Fall) falschen Ansatzes fällt die linke Seite der Gleichung weg, und man ist so klug als wie zuvor.) Ein solcher Fall tritt in der zu Beispiel (A) ganz leicht geänderten DGL

$$y'' + 9y = \sin(3x) \qquad \text{(B)}$$

auf. Diese Gleichung hat die Lösung der charakteristischen Gleichung ${}_2\lambda_1 = \pm 3i$, und somit $y_H = A\sin(3x) + B\cos(3x)$. Aus Tabelle 1 folgt als unbestimmter Ansatz für die partikuäre Lösung wieder $y_P = \beta_1 \sin(3x) + \beta_2 \cos(3x)$. Dieser Ansatz ist aber die homogene Lösung, und Einsetzen in die DGL führt auf den Widerspruch $0 = \sin(3x)$. Die Lösung des Dilemmas besteht darin, den unbestimmten Ansatz mit x zu multiplizieren, der korrekte Ansatz für dieses Beispiel lautet daher:

$$y_P = x\,(\beta_1 \sin(3x) + \beta_2 \cos(3x))\,.$$

Nach zugegebermaßen etwas mühsamer Rechnung (Einsetzen, Koeffizientenvergleich) findet man schließlich als partikuläre Lösung $y_P = -1/6\,x\cos(3x)$, d.h. $\beta_1 = 0$ und $\beta_2 = -1/6$.

In Fällen wie diesem, muß man Tabelle 1 daher um folgende Regel ergänzen:

Regel: *Wir bezeichnen den aus Tabelle 1 folgenden Ansatz (rechte Spalte) von jetzt an als ${}^0y_P$ (denken Sie an Ansatz "0.-ter Ordnung"). Stellt sich heraus, daß ${}^0y_P$ eine Lösung der der zu lösenden inhomogenen DGL zugeordneten homogenen DGL ist (man sieht dies ja sofort!), so versucht man den Ansatz ${}^1y_P = x \cdot {}^0y_P$. Sollte ${}^1y_P$ noch immer eine Lösung der homogenen Gleichung sein, so multipliziert man nochmals mit x, d.h. ${}^2y_P = x \cdot {}^1y_P = x^2 \cdot {}^0y_P$.*

Für lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten sind damit alle möglichen Fälle abgedeckt. Bei linearen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (für die alles in diesem Abschnitt gesagt sinngemäß gilt!) kann es vorkommen, daß auch ${}^2y_P$ eine Lösung der homogenen Gleichung ist. In solchen Fällen multipliziert man ${}^0y_P$ solange mit x, bis der daraus entstehende unbestimmte Ansatz $x^m \cdot {}^0y_P$ keine Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung mehr ist.

Formelsammlungen verwendem im Bestreben möglichst allgemein und platzsparend zu sein, verschiedene Schreibweisen, um den Inhalt von Tabelle 1 und der ergänzenden Regel auszudrücken. *Bitte vergewissern Sie sich, daß sie mit der Notation Ihrer Formelsammlung vertraut sind!!* Zur Illustration der eben gebrachten allgemeinen Überlegungenjetzt ein paar Beispiele (Die Rechenschritte sind teilweise nur skizziert und müssen von Ihnen vervollständigt werden!):

► **Beispiel i:** Zum Finden der partikulären Lösung der DGL

$$y'' - y' - 2y = \sin x$$

mit Lösung $y_H = A\exp(2x) + B\exp(-x)$ der zugeordneten homogenen Gleichung (*Nachrechnen!*) folgt aus Tabelle 1 der unbestimmte Ansatz

$${}^0y_P = \beta_1 \sin x + \beta_2 \cos x = y_P.$$

Es gilt ${}^0y_P = y_P$, da weder $\sin x$ noch $\cos x$ eine Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung sind.

Als nächstes berechnet man erste und zweite Ableitung von y_P, $y_P' = \beta_1 \cos x - \beta_2 \sin x$, $y_P'' = -\beta_1 \sin x - \beta_2 \cos x$, und setzt in die DGL ein:

$$\underbrace{-\beta_1 \sin x - \beta_2 \cos x}_{y_P''} - (\underbrace{\beta_1 \cos x - \beta_2 \sin x}_{y_P'}) - 2(\underbrace{\beta_1 \sin x + \beta_2 \cos x}_{y_P}) = \sin x$$

Durch Vereinfachen und Sortieren nach Termen in $\cos x$ und $\sin x$ erhält man

$$\sin x(\underbrace{-3\beta_1+\beta_2}_{=1})+\cos x(\underbrace{-\beta_1-3\beta_2}_{=0})=1\cdot\sin x+0\cdot\cos x,$$

somit findet man die gesuchten Koeffizienten β_1, β_2 als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}-3\beta_1+\beta_2 &= 1\\ -\beta_1-3\beta_2 &= 0.\end{aligned}$$

Man erhält $\beta_1=-3/10$ und $\beta_2=1/10$, und somit lautet die gesuchte partikuläre Lösung

$$y_P=-\frac{3}{10}\sin x+\frac{1}{10}\cos x.$$

◀

▶ **Beispiel ii:** Zum Finden der partikulären Lösung der DGL

$$y''+2y'+2y=2x^2-x+1$$

mit Lösung $y_H=e^{-x}\,(A\sin x+B\cos x)$ der zugeordneten homogenen Gleichung (*Nachrechnen!*) folgt aus Tabelle 1 der unbestimmte Ansatz

$$^0y_P=\beta_2x^2+\beta_1x+\beta_0=y_P.$$

Wenn der Störterm $h(x)$ ein Polynom ist, gilt fast immer $^0y_P=y_P$, da (außer in den Spezialfällen $y''=0$, oder eine der Lösungen der charakteristischen Gleichungen $\lambda=0$) ein Polynom nie Lösung der homogenen Gleichung ist.

Als nächstes berechnet man erste und zweite Ableitung von y_P, $y_P'=2\beta_2x+\beta_1$, $y_P''=2\beta_2$, und setzt in die DGL ein:

$$\underbrace{2\beta_2}_{y_P''}+2(\underbrace{2\beta_2x+\beta_1}_{y_P'})+2(\underbrace{\beta_2x^2+\beta_1x+\beta_0}_{y_P})=2x^2-x+1$$

Durch Vereinfachen und Sortieren nach Termen in x^2, $x^1=x$ und $x^0=1$ erhält man

$$x^2(\underbrace{2\beta_2}_{=2})+x(\underbrace{4\beta_2+2\beta_1}_{=-1})+1(\underbrace{2\beta_2+2\beta_1+2\beta_0}_{=1})=2\cdot x^2-1\cdot x+1\cdot 1.$$

Durch Koeffizientenvergleich findet man $\beta_2=1$, $\beta_1=-5/2$ und $\beta_0=2$, und somit lautet die gesuchte partikuläre Lösung

$$y_P=x^2-\frac{5}{2}x+2.$$

◀

▶ **Beispiel iii:** Zum Finden der partikulären Lösung der DGL

$$y''-4y'+4y=3\exp(2x)$$

mit Lösung

$$y_H=A\exp(2x)+Bx\exp(2x)$$

der zugeordneten homogenen Gleichung (*Nachrechnen!*) folgt aus Tabelle 1 zunächst der unbestimmte Ansatz $^0y_P=\beta\exp(2x)$. In diesem Fall sind aber sowohl ^0y_P als auch(!) $^1y_P=\beta\,x\exp(2x)$ Lösungen der homogenen Gleichung. Der korrekte unbestimmte Ansatz ist daher gemäß der Regel auf Seite 19

$$y_P={}^2y_P=\beta\,x^2\exp(2x).$$

Als nächstes berechnet man erste und zweite Ableitung von y_P, $y_P' = 2\beta x\exp(2x) + 2\beta x^2\exp(2x)$, $y_P'' = 2\beta\exp(2x) + 8\beta x\exp(2x) + 4\beta x^2\exp(2x)$, und setzt in die DGL ein:

$$\underbrace{2\beta\exp(2x) + 8\beta x\exp(2x) + 4\beta x^2\exp(2x)}_{y_P''} - 4(\underbrace{2\beta x\exp(2x) + 2\beta x^2\exp(2x)}_{y_P'}) + 4(\underbrace{\beta x^2\exp(2x)}_{y_P}) = 3\exp(2x)$$

Alle Terme in x und x^2 kürzen sich heraus, und es bleibt

$$2\beta\exp(2x) = 3\exp(2x)$$

übrig, somit ist der gesuchte Koeffizient $\beta = 3/2$ und man erhält als partikuläre Lösung

$$y_P = \frac{3}{2}x^2\exp(2x).$$

◀

Der Rest dieses Abschnitts ist optional und als Vertiefung für Interessierte gedacht und daher nicht Prüfungsstoff

Zur Vervollständigung ein paar Anmerkungen zu komplizierteren Fällen: (1) Ist die Störfunktion eine Summe von Termen $h(x) = h_1(x) + h_2(x) + \ldots$, so sucht man für jedes $h_i(x)$ eine partikuäre Lösung $y_{P,i}$ gemäß Tab. 1 und der Regel auf S. 19, die gesuchte vollständige partikuläre Lösung ist $y_P = y_{P,1} + y_{P,2} + \ldots$.Ist z.B. die Störfunktion $h(x) = e^x + \sin(2x)$, so sucht man zwei partikuläre Lösungen, die erste für die Störfunktion $h_1(x) = e^x$, die zweite für $h_2(x) = \sin(2x)$, die Summe der beiden auf diese Weise gefundenen partikulären Lösungen für $h_1(x)$ und $h_2(x)$ erfüllt die vollständige DGL mit Störfunktion $h(x) = e^x + \sin(2x)$.

(2) Manchmal treten als Störfunktionen auch Produkte $h(x) = h_1(x)h_2(x)$ auf. Uns interessiert hier nur der Speziallfall, daß eine der beiden Funktionen ein Polynom $\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ist, und die zweite Funktion eine Exponentialfunktion $\gamma\exp(cx)$, oder eine Sinus- $\gamma\sin(cx)$ bzw. Cosinusfunktion $\gamma\cos(cx)$ ist. Als Ansatz ${}^0y_P$ verwendet man das Produkt der entsprechden Ansätze aus Tab. 1. Ist z.B. $h(x) = (\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0)\exp(cx)$, so folgt somit als unbestimmter Ansatz

$${}^0y_P(x) = (\beta_n x^n + \ldots + \beta_1 x + \beta_0)\exp(cx).$$

Wenn $h_2(x)$ eine Winkelfunktion (sin, cos) ist, so ist der unbestimmte Ansatz etwas komplizierter, denn z.B. aus $h_2(x) = \sin x$ folgt ja ${}^0y_{P,2} = \beta_1\sin x + \beta_2\cos x$. Dieses $y_{P,2}$ ist dann mit dem unbestimmten Ansatz $y_{P,1}$ für das Polynom $h_1(x)$ zu multiplizieren, womit sich in Summe folgender Ansatz für Störfunktionen der Form $h(x) = (\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0)\sin(cx)$, $h(x) = (\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0)\cos(cx)$, sowie $h(x) = (\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0)(\gamma_1\sin(cx) + \gamma_2\cos(2x))$ ergibt:

$${}^0y_P = (\beta_n x^n + \ldots + \beta_1 x + \beta_0)\sin(cx) + (\delta_n x^n + \ldots + \delta_1 x + \delta_0)\cos(cx).$$

Sollte ${}^0y_P$ eine Lösung der homogenen Gleichung sein (in der Praxis vermutlich erst bei Gleichungen n-ter Ordnung $n > 2$ von Bedeutung), so ist ${}^0y_P$ solange mit x zu multiplizieren, bis der resultierende Ansatz keine Lösung der homogenen Gleichung mehr ist. Weitere Details entnehmen Sie im Falle des Falles bitte Ihrer Formelsammlung.

(3) Ist die Störfunktion $h(x) = \alpha e^{cx}$ (wobei $c = a + ib$ komplex sein kann), so gibt es einen Trick, mit dem man sich einiges an Rechenarbeit ersparen kann (Bronstein, Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik). Diese “Abkürzung” kann mann durch den Satz von Moivre auch auf Winkelfunktionen anwenden, denn $\cos(bx) + i\sin(bx) = \exp(ibx)$, und man verwendet einfach Real- $(h(x) = \alpha\cos(bx))$ bzw. Imaginärteil $(h(x) = \alpha\sin(bx))$ der Lösung. *Bitte verwenden Sie diesen Trick aber nur, wenn Sie verstehen, was Sie tun!*

Gegeben sei die DGL $y''+a_1y'+a_2 = h(x)$ und die Störfunktion $h(x)$ habe die Form $h(x) = \alpha e^{cx}$. Dann gilt für reelle und komplexe c, daß

$$y_P = \frac{\alpha x^m \exp(cx)}{P^{(m)}(\lambda = c)} \qquad \text{(A)}$$

wobei $P(\lambda) = \lambda^2+a_1\lambda+a_2$ das charakteristische Polynom der DGL ist, und m der Grad der Ableitung (nach λ!) des charakteristischen Polynoms ist, für die (zum ersten Mal!) $P^{(m)}(\lambda = c) \neq 0$ gilt. Ist der Wert des charakteristischen Polynoms selbst an der Stelle $\lambda = c$ ungleich Null, so ist $m = 0$ und der obige Ausdruck vereinfacht sich zu $y_P = \alpha \exp(c)/P(\lambda = c)$.

Wir illustrieren die Methode an zwei Beispielen: (a) Zu lösen sei die DGL aus Beispiel iii, $y'' - 4y' + 4y = 3\exp(2x)$ mit charakteristischem Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$. Es sind $\alpha = 3$ und $c = 2$. Man sieht, daß sowohl $P(\lambda)$ als auch $P'(\lambda) = 2\lambda - 4$ an der Stelle $\lambda = c = 2$ verschwinden, erst $P''(\lambda = 2) = 2 \neq 0$, somit ist $m = 2$. Einsetzen in Gl. (A) führt sofort auf $y_P = 3x^2 \exp(2x)/2$, dasselbe Ergebnis, wie wir es in Beispiel iii durch unbestimmten Ansatz und Koeffizientenvergleich erhielten.

(b) Als zweites Beispiel betrachten wir die DGL $y'' + 9y = \sin(3x)$ (s.S. 19). Um Gl. (A) anwenden zu können, weichen wir ins Komplexe aus und suchen eine partikuläre Lösung der DGL $y''+9y = \exp(3ix)$ mit $c = 0+3i$. Der Imaginärteil der partikulären Lösung dieser verallgemeinerten Gleichung ist dann die gesuchte partikuläre Lösung der ursprünglichen Gleichung. Das charakteristische Polynom ist in diesem Fall $P(\lambda) = \lambda^2 + 9$, und es gilt $P(\lambda = c = 3i) = 0$. Somit untersuchen wir die erste Ableitung $P'(\lambda) = 2\lambda)$, diese hat an der Stelle $\lambda = c = 3i$ den Wert $6i \neq 0$. Somit folgt $m = 1$ und wir erhalten aus Gl. (A) ($\alpha = 1$)

$$y_P = \frac{x\exp(3ix}{6i} = -\frac{ix\exp(3ix)}{6} = -\frac{ix(\cos(3x) + i\sin(3x))}{6} = \frac{1}{6}x\sin(3x) + i\left(-\frac{1}{6}x\cos(3x)\right)$$

Der Imaginärteil dieser partikulären Lösung der verallgemeinerten DGL mit $h(x) = \exp(i3x)$ ist $-1/6\,x\cos(3x)$, dies ist somit die partikuläre Lösung der ursprünglichen DGL ($h(x) = \sin(3x)$, vgl. S. 19). Der Realteil $1/6\,x\sin(3x)$ wäre die partikuläre Lösung der DGL $y'' + 9y = \cos(3x)$.

3.3.2 Variation der Konstanten

Dieser Abschnitt ist optional und als Vertiefung für Interessierte gedacht und daher nicht Prüfungsstoff

Um dieses Skriptum abzurunden wird zunächst an einem Beispiel die Variation der Konstanten für lineare DGL 2. Ordnung illustriert, danach der allgemeine Lösungsweg skizziert. Wie in Abschnitt 3.1 erwähnt, würde diese Methode auch bei Gleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten funktionieren.

► Man berechne die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' - 3y = h(x) = 5\sin(2x)$$

Wir beginnen mit der Lösung der homogenen Gleichung und finden aus

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

die allgemeine Lösung

$$y_H = Ae^{3x} + Be^{-x}$$

Wie bei der Variation der Konstanten bei Gleichungen 1. Ordnung besteht der Schlüsselschritt darin, zum Finden der partikuläre Lösung die Konstanten A und B als Funktionen von x aufzufassen, d.h. $A = A(x)$ und $B = B(x)$. Man nimmt also an, daß die vollständige Lösung der inhomogenen Gleichung die Form

$$y_P = A(x)u_1(x) + B(x)u_2(x) = A(x)e^{3x} + B(x)e^{-x} \qquad \text{(a)}$$

hat. Aus (a) erhält man zunächst die Ableitung

$$y_P' = A'(x)u_1(x) + A(x)u_1'(x) + B'(x)u_2(x) + B(x)u_2'(x) =$$
$$= A'(x)e^{3x} + 3A(x)e^{3x} + B'(x)e^{-x} - B(x)e^{-x}.$$

Einsetzen von Ansatz (a) in die DGL würde nur *eine* Gleichung für *zwei* unbekannte Funktionen $A(x)$ und $B(x)$ ergeben. Uns bleibt daher die Möglichkeit, für die gesuchten Funktionen $A(x)$ und $B(x)$ noch eine zusätzliche Bedingung zu verlangen. Wir nützen dies aus und fordern, daß

$$A'(x)u_1(x) + B'(x)u_2(x) = A'(x)e^{3x} + B'(x)e^{-x} = 0 \qquad \text{(b)}$$

Damit vereinfacht sich die Ableitung y_P' erheblich

$$y_P' = 3A(x)e^{3x} - B(x)e^{-x} \qquad \text{(c)}$$

und auch die zweite Ableitung bleibt noch überschaubar,

$$y_P'' = 3A'(x)e^{3x} + 9A(x)e^{3x} - B'(x)e^{-x} + B(x)e^{-x}. \qquad \text{(d)}$$

Jetzt setzen wir die Ausdrücke für $y_P(x)$, $y_P'(x)$ und $y_P''(x)$ (Gl. (a), (c) und (d)) in die DGL ein und erhalten (nach entsprechendem Vereinfachen)

$$3A'(x)e^{3x} - B'(x)e^{-x} = 5\sin(2x). \qquad \text{(e)}$$

Wie im Fall der Variation der Konstanten bei DGL 1. Ordnung dürfen keine Terme in $A(x)$ und $B(x)$ (also die Funktionen selbst) übrigbleiben, sonst liegt ein Rechenfehler vor! Das Gleichungssystem (b) und (e)

$$\begin{aligned} A'(x)e^{3x} + B'(x)e^{-x} &= 0 \\ 3A'(x)e^{3x} - B'(x)e^{-x} &= 5\sin(2x), \end{aligned}$$

läßt sich nach $A'(x)$ und $B'(x)$ auflösen, und man erhält nach kurzer Rechnung:

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{5}{4}\sin(2x)e^{-3x} \\ B'(x) &= -\frac{5}{4}\sin(2x)e^{x}. \end{aligned}$$

Damit erhält man durch direkte Integration

$$\begin{aligned} A(x) &= -\frac{5}{32}\left(2\cos(2x) + 3\sin(2x)\right)e^{-3x} \\ B(x) &= \frac{1}{4}\left(2\cos(2x) - \sin(2x)\right)e^{x} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in den Ansatz (a) erhält man schließlich

$$y_P = -\frac{7}{13}\sin 2x + \frac{4}{13}\cos 2x.$$

Zum Vergleich noch kurz das Finden einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung mittels unbestimmten Ansatzes. Formelsammlungen schlagen für diesen Fall die Funktion

$$y_P = C\sin 2x + D\cos 2x$$

vor. Einsetzen von

$$y_P' = 2C\cos 2x - 2D\sin 2x$$
$$y_P'' = -4C\sin 2x - 4D\cos 2x$$

in die inhomogene Gleichung führt zu

$$y_P'' - 2y_P' - 3y_P = \underbrace{-4C\sin 2x - 4D\cos 2x}_{y_P''} - 2\underbrace{(2C\cos 2x - 2D\sin 2x)}_{y_P'} - 3\underbrace{(C\sin 2x + D\cos 2x)}_{y_P}$$
$$= 5\sin(2x)$$

was sich zu

$$\underbrace{(4D - 7C)}_{5}\sin 2x + \underbrace{(-4C - 7D)}_{0}\cos 2x = 5\cdot\sin(2x) + 0\cdot\cos(2x)$$

vereinfachen läßt. Durch Koeffizientenvergleich findet man die Bestimmungsgleichungen für C und D

$$\begin{aligned} -4C - 7D &= 0 \\ -7C + 4D &= 5 \end{aligned}$$

und findet $C = -7/13$ und $D = 4/13$. Somit ergibt sich als allgemeinste Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y = y_H + y_P = Ae^{3x} + Be^{-x} - \frac{7}{13}\sin 2x + \frac{4}{13}\cos 2x,$$

in Übereinstimmung mit der durch Variation der Konstanten gefundenden partikulären Lösung. ◀

Zum Abschluß jetzt noch die Variation der Konstanten in voller Allgemeinheit. Die inhomogene lineare DGL

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = h(x)$$

hat eine partikuläre Lösung der Form

$$y_P = A(x)u_1(x) + B(x)u_2(x),$$

wobei $u_1(x)$ und $u_2(x)$ die Lösungen der zugeordneten homogenen Gleichung sind. Rechnet man mit diesem Ansatz (in analoger Weise zum obigen speziellen Beispiel) weiter, so kommt man auf folgende Bedingungen für $A'(x)$ und $B'(x)$

$$\begin{aligned} A'(x)u_1(x) + B'(x)u_2(x) &= 0 \\ A'(x)u_1'(x) + B'(x)u_2'(x) &= h(x) \end{aligned}$$

(diese Gleichungen entsprechen (b) und (e) des Beispiels). Gleichungssysteme dieser Art löst man am bequemsten nach der Cramer'schen Methode (in allen Formelsammlungen zu finden). Die Vorraussetzung ist, daß die Determinante (im Zusammenhang mit Differentialgleichungen als "Wronski Determinante" bekannt)[4]

$$W[u_1(x), u_2(x)] = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

nicht verschwindet. In diesem Fall erhält man nämlich

$$A'(x) = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 0 & u_2(x) \\ h(x) & u_2'(x) \end{vmatrix}$$

und

$$B'(x) = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} u_1(x) & 0 \\ u_1'(x) & h(x) \end{vmatrix}.$$

Nach einigen Umformungen kommt man dann auf folgende "Fertigformel" für die gesuchten Hilfsfunktionen $A(x)$ und $B(x)$:

$$\begin{aligned} A(x) &= -\int dx \frac{h(x)u_2(x)}{W[u_1(x), u_2(x)]} \\ B(x) &= \int dx \frac{h(x)u_1(x)}{W[u_1(x), u_2(x)]}. \end{aligned}$$

3.4 Mehr zu Anfangs- und Randbedingungen

Dieser Abschnitt ist optional und als Vertiefung für Interessierte gedacht und daher nicht Prüfungsstoff

Der Vollständigkeit halber noch ein paar Anmerkungen zum Festlegen der (Integrations)konstanten. Wie aus obigen Beispielen erkenntlich, benötigt man für eine lineare DGL 2. Ordnung genau zwei Bedingungen, um die beiden Konstanten zu bestimmen. (Bei linearen DGL n-ter Ordnung treten n Konstanten auf, die

[4]Die Determinante einer 2×2 Matrix ist $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

durch n Bedingungen bestimmt werden müssen.) Verwendet man Bedingungen die Funktion und Ableitung an einem bestimmten Punkt x_0 festlegen, d.h.

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \alpha \\ y'(x_0) &= \beta \end{aligned}$$

so spricht man von AB. Dies entspricht den bisher aufgetretenen Beispielen.

Man kann aber auch den Wert der Funktion an zwei Punkten x_0 und x_1 festlegen, d.h.

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \gamma \\ y(x_1) &= \delta; \end{aligned}$$

in diesem Fall spricht man von *Randbedingungen*.[5]

Randbedingungen können auch etwas andere Form annehmen, z.B. kann das Verhalten für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$ festgelegt werden. Besonders in solchen Fällen ist oft eine der Konstanten 0. Beispiel: Die DGL $y''+y'-6y=0$ hat die allgemeine Lösung $y = Ae^{2x}+Be^{-3x}$. Die Randbedingungen seien $y(0)=1$, $y(x) \to 0$ für $x \to \infty$. Aus der ersten Bedingung folgt

$$y(0) = 1 = A + B$$

Da e^{2x} für große x über alle Grenzen wächst (gegen unendlich geht), kann die zweite Bedingung nur durch $A = 0$ erfüllt werden. Damit folgt aus der ersten Bedingung $B = 1$ und die spezielle Lösung der DGL lautet

$$y = e^{-3x}.$$

Als letzter Fall seien kurz *periodische* Randbedingungen erwähnt. Diese haben die allgemeine Form

$$y(x) = y(x+L)$$

Als Beispiel betrachten wir die Lösung der DGL $y''+\omega^2 y = 0$ unter solchen Randbedingungen. Die allgemeine Lösung lautet

$$y = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x),$$

und die periodische Randbedingung verlangt, daß

$$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) = A\cos[\omega(x+L)] + B\sin[\omega(x+L)] \qquad \text{(A)}$$

Diese Randbedingung unterscheidet sich von den bisher behandelten Fällen, denn der Vergleich von linker und rechter Seite zeigt, daß die Bedingung nur erfüllt sein kann, wenn $\cos(\omega x) = \cos[\omega(x+L)]$ und $\sin(\omega x) = \sin[\omega(x+L)]$. Zur Vermeidung umständlicher Manipulationen mit Summensätzen kann man sich der Tatsache bedienen, daß diese beiden Bedingungen äquivalent sind zu

$$\cos(\omega x) + i\sin(\omega x) = \cos[\omega(x+L)] + i\sin[\omega(x+L)],$$

d.h.

$$\exp(i\omega x) = \exp[i\omega(x+L)] = \exp(i\omega x)\exp(i\omega L)$$

(Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn Real- und Imaginärteil übereinstimmen.) Daraus folgt aber weiters, daß

$$\exp(i\omega L) = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega L = 2k\pi$$

Somit kann die periodische Randbedingung (A) nur für *ganz bestimmte Werte von* ω erfüllt werden

$$\omega = \frac{2k\pi}{L},$$

d.h. nur Funktionen folgender Form können die periodischen Randbedingungen erfüllen:

$$y = A\cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) + B\sin\left(\frac{2k\pi}{L}x\right).$$

Die Werte von A und B sind noch frei und können wie in anderen Fällen durch AB bestimmt werden.

[5] Man kann auch den Wert der Ableitung an zwei Punkten festgelegt werden: $y'(x_0) = \gamma$, $y'(x_1) = \delta$.

▶ Anwendung auf eindimensionale Schrödingergl. des Teilchens im unendlich hohen Potentialtopf: Das folgende Beispiel illustriert die Bedeutung von Randbedingungen und der Rückwirkung, die die Lösung des mathematischen Problems (Erfüllung der Randbedingung) auf die Physik hat. Die eindimensionale Schrödingergleichung (s. z.B. Allgemeine Chemie Vorlesung) hat die Form

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Psi''(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \qquad \text{(A)}$$

Dabei ist $\Psi(x)$ die gesuchte Wellenfunktion als Funktion des Orts x, h ist das Planck'sche Wirkungsquantum, m ist die Masse des Teilchens, $V(x)$ ist die potentielle Energie des Teilchens, und E ist die Gesamtenergie des Teilchens (Summe aus potentieller und kinetischer Energie). Für folgenden Spezialfall ist (A) elementar lösbar. Die potentielle Energie des Teilchens sei in einem Bereich zwischen $x = 0$ und $x = L$ Null, d.h. $V(x) = 0$ für $0 \leq x \leq L$, überall sonst unendlich, d.h. $V(x) = \infty$ für $x < 0$ und $x > L$. Überall, wo das Potential unendlich ist, kann sich das Teilchen nicht aufhalten, aus dieser (physikalischen) Überlegung folgt $\Psi(x) = 0$ für $x < 0$ und $x > L$. Wir suchen daher die Lösung der DGL

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Psi''(x) = E\Psi(x) \qquad \text{(B)}$$

auf dem Intervall $0 \leq x \leq L$. Die Wellenfunktion muß weiters aber für alle x stetig sein, und daraus ergeben sich Randbedingungen an den Punkten $x = 0$ und $x = L$. Wenn nämlich $\Psi(x) = 0$ für alle $x < 0$ und $x > L$, so muß auch gelten $\Psi(x = 0) = \Psi(x = L) = 0$, denn ansonsten hätte die Funktion an diesen beiden Punkten eine Sprungstelle, was (wiederum physikalisch) nicht sinnvoll ist. Wir suchen also die Lösung der Gleichung (B) unter den Randbedingungen $\Psi(0) = \Psi(L) = 0$. Durch Umformen folgt

$$\Psi''(x) + \underbrace{\frac{8\pi^2 mE}{h^2}}_{\omega^2}\Psi(x) = 0, \qquad \text{(C)}$$

wobei wir die Abkürzung $\omega^2 = 8\pi^2 mE/h^2$ eingeführt haben. (C) hat die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

mit Lösungen ${}_2\lambda_1 = \pm i\omega$, und die allgemeine Lösung der DGL ist

$$\Psi = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x). \qquad (D)$$

Lösung (D) von (B) muß aber auch noch die Randbedingungen erfüllen,[6] d.h.

$$\begin{aligned} \Psi(0) = A\cos(\omega 0) + B\sin(\omega 0) &= 0 \\ \Psi(L) = A\cos(\omega L) + B\sin(\omega L) &= 0 \end{aligned}$$

Aus der ersten Randbedingung folgt $A = 0$, somit vereinfacht sich die zweite Gleichung zu

$$B\sin(\omega L) = 0,$$

die nur für $\omega L = n\pi$ bzw.

$$\omega = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z} \qquad \text{(E)}$$

erfüllt ist. Somit finden wir als Lösung von (B) (Schrödingergleichung für das eindimensionale Teilchen im unendlich hohen Potentialtopf)

$$\Psi_n(x) = B\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n = 1, 2, 3\ldots$$

Hierbei haben wir $n = 0$ ausgeschlossen, denn $\Psi_0(x) = 0$ ist keine (physikalisch) sinnvolle Lösung. Negative n bewirken nur eine Änderung des Vorzeichens (und somit der Phase),[7] daher genügt es n aus $\mathbb{N}$ zu wählen.

[6] Da die Randbedingungen effektiv periodisch sind, könnten wir den eben untersuchten allgemeinen Fall anwenden, es ist jedoch instruktiv, die Lösung nocheinmal schrittweise zu suchen.

[7] $\Psi_{-n}(x) = -\Psi_n(x)$

Der interessanteste Punkt ist jedoch, daß die Randbedingungen eine Einschränkung der möglichen Energiewerte E bedeutet, die das System annehmen kann. Aus (E) folgt ja (Einsetzen von $\omega^2 = 8\pi^2 mE/h^2$)

$$\frac{8\pi^2 mE}{h^2} = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

bzw.

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8L^2 m}$$

Man nennt die $\Psi_n(x)$ auch Eigenfunktionen, und die E_n die dazugehörigen Eigenwerte des Randwertproblems. Die Notwendigkeit der Quantisierung der Energie des Systems (nicht alle Werte von E sind möglich) ergibt sich im mathematischen Formalismus der Schrödingergleichung quasi automatisch um die (physikalisch bedingten) Randbedingungen zu erfüllen. ◀

Verwendete Literatur

- H. G. Zachmann “Mathematik für Chemiker”, 4. Auflage, Verlag Chemie, Weinheim, Deerfield Beach, Basel 1981.
- F. B. Hildebrand “Advanced Calculus for Applications”, 2. Auflage, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1976.

Auflistung von Änderungen — “revision history”

December 2002 Version 1.1
Zusätzliche Beispiele und Hinweise zum Finden der partikulären Lösung von linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
Im optionalen Kapitel “Anfangs- und Randbedingungen” Lösen der eindimensionalen Schrödingergleichung für ein Teilchen im unendlich tiefen Potentialtopf.

November 2002 Version 1.0

GNU Free Documentation License

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.

C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.

D. Preserve all the copyright notices of the Document.

E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.

F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.

G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

H. Include an unaltered copy of this License.

I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.

J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.

K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.

L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.

M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.

N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.

O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties–for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warrany Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

Copyright (c) YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with...Texts." line with this:

with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.