Mathematik und Statistik für Molekularbiologen

Komplexen Zahlen, Differenzieren und Integrieren

Stefan Boresch
stefan@mdy.univie.ac.at, http://www.mdy.univie.ac.at/en/sbhome.html
Molecular Dynamics and Biomolecular Simulation Group,
Institut für Theoretische Chemie und Molekulare Strukturbiologie,
Universität Wien, Währingerstraße 17, 1090 Wien, Austria

10. November 2008

ENTWURF

Inhaltsverzeichnis

2 Rechen mit komplexen Zahlen

Vorausgesetzte Kenntnisse: *Der folgende Abschnitt setzt die Rechenregeln für Potenzen, insbesondere für die Exponentialfunktion* e^x *[Bartsch S. 22] sowie Vertrautheit mit den Winkelfunktionen (Winkelmaße, d.h. Grad und Radiant [Bartsch S. 69], Definition von* $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, *Vorzeichen dieser Funktionen in Abhängigkeit vom Quadranten, Werte der Winkelfunktionen für spezielle Winkel [Bartsch S. 119ff]) voraus!*

2.1 Die Notwendigkeit komplexer Zahlen bzw. was ist $\sqrt{-1}$

Ein Beispiel: Erinnern Sie sich an das Lösen quadratischer Gleichungen:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \qquad \text{(A)}$$

Anwenden der üblichen Prozedur* führt zu den beiden Lösungen

$${}_2x_1 = -1 \pm \sqrt{1+3} = \{-3, 1\}.$$

Eine minimale Änderung in der Ausgangsgleichung, z.B.,

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \qquad \text{(B)}$$

bewirkt jedoch das Negativwerden des Ausdrucks unter der Wurzel:

$${}_2x_1 = -1 \pm \sqrt{1-3} = -1 \pm \sqrt{-2} = ?. \qquad \text{(C)}$$

Die Rechenoperation $\sqrt{-2}$ ist mittels reeller Zahlen nicht möglich, denn es gibt keine Zahl $x \in \mathbb{R}$ für die

$$x^2 = -2 \qquad \text{bzw.} \qquad x = \sqrt{-2}$$

gilt. Das Fragezeichen in (C) läßt sich auf

$$\sqrt{-1} = ? \tag{1}$$

reduzieren, denn jede negative Wurzel $\sqrt{-a}$, $a \in \mathbb{R}$ läßt sich in $\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$ umformen, d.h., wir können (C) zu

$${}_2x_1 = -1 \pm \sqrt{2} \times \sqrt{-1}$$

"vereinfachen". Mit Hilfe der Definition (um nicht zu sagen Abkürzung)

$$i^2 = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{-1} = i \tag{2}$$

ergibt sich die formale Lösung von (B) in der Form

$${}_2x_1 = -1 \pm i\sqrt{2}. \qquad \text{(D)}$$

Die Konsequenzen von Definition (2), die die reellen um die *imaginären* Zahlen erweitert, gilt es im folgenden zu erforschen.

*Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat die beiden Lösungen ${}_2x_1 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Überblick über Zahlensysteme: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind selbst das Ergebnis eines Abstraktions- bzw. Erweiterungsprozesses. In den wohlvertrauten natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ kann man zwar beliebe Additionen und Multiplikationen durchführen,[†] jedoch eine simple Subtraktion wie $2 - 3$ führt zu Problemen. Durch das Hinzunehmen der negativen Zahlen $\{-1, -2, -3, \ldots\}$ werden die natürlichen auf die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ erweitert, für die jetzt auch beliebe Subtraktionen möglich sind. Schwierigkeiten gibt es jedoch weiterhin mit der Division. Während $6/2 = 3$ ohne Probleme durchführbar ist, gibt es keine ganze Zahl $c = 4/3$, $c \in \mathbb{Z}$, die die Beziehung $3 \times c = 4$ erfüllt. Die Erweiterung der ganzen Zahlen um Brüche a/b führt auf die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, mit denen jetzt alle vier Grundrechenarten ohne Einschränkungen durchgeführt werden können. (*Bemerkung:* Die Ausnahme ist die Division durch 0, die in keinem Zahlenbereich (auch nicht den reellen und hier zu besprechenden komplexen Zahlen) vernünftig definierbar ist. Division durch 0 ist eine verbotene Operation.)

Es gibt jedoch Zahlen, die sich nicht als Brüche darstellen lassen, darunter gehören z.B. die Wurzeln von Primzahlen ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ usw.) sowie π und die Eulersche Zahl $e \approx 2.71828\ldots$.[‡] Die Vereinigung von rationalen und irrationalen Zahlen ist die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, der Zahlenbereich, den man üblicherweise in den Naturwissenschaften verwendet.

Durch Multiplikation mit $i = \sqrt{-1}$[§] läßt sich nun aus jeder reellen Zahl eine imaginäre Zahl machen. Der "Faktor" i verdeutlicht, daß es sich bei einer Zahl wie $5,27i$ um keine reelle Zahl handelt. Z.B. ist das Produkt zweier positiver imaginärer Zahlen negativ, $(+5i) \times (+3i) = 15\,i^2 = 15 \times (\sqrt{-1})^2 = -15$, etwas, was für reelle Zahlen nie zutreffen kann. Imaginäre Zahlen für sich allein hätten aber letztlich vergleichbare Beschränkungen wie die reellen Zahlen, das wirklich Neue entsteht aus der Kombination von reellen und imaginären Zahlen. Zahlen, die sich aus einer reellen Zahl plus einer imaginären Zahl zusammensetzen, bezeichnet man als *komplexer* Zahlen, die Lösungen (D) der quadratischen Gleichung (B), $x_1 = -1 + i\sqrt{2}$, $x_2 = -1 - i\sqrt{2}$ sind Beispiele. Jede komplexe Zahl w hat die Form

$$w = u + \sqrt{-1}\, v = u + i\, v, \tag{3}$$

wobei u und v reelle Zahlen sind ($u,\ v \in \mathbb{R}$). Man bezeichnet

$$u = \Re(w) = \mathrm{Re}(w) \tag{4}$$

als *Realteil*,

$$v = \Im(w) = \mathrm{Im}(w) \tag{5}$$

als *Imaginärteil*[¶] von w. Die Menge der komplexen Zahlen wird gewöhnlich mit $\mathbb{C}$ abgekürzt. Reelle und imaginäre Zahlen sind Teilmengen von $\mathbb{C}$, mit $\Im(w) = 0$ bzw. $\Re(w) = 0$.

[†] Viele Lehrbücher unterscheiden zwischen natürlichen Zahlen *mit* und *ohne* 0, dies ist aber für das Folgende belanglos.

[‡] Diese sogenannten *irrationalen* Zahlen tauchen durchaus schon bei einfachen Problemstellung auf: Denken Sie an ein Quadrat mit Seitenlänge 1 m. Nach dem Pythagoräischen Lehrsatz beträgt das Quadrat der Diagonale dieses Quadrats $(1^2 + 1^2)\ \mathrm{m}^2 = 2\ \mathrm{m}^2$. Was aber ist die Länge der Diagonale, d.h., was ist $\sqrt{2}$ m?

[§] Die Abkürzung i für $\sqrt{-1}$ ist zwar die weitverbreitetste, jedoch sind auch andere Symbole üblich, z.B. in der Elektrotechnik wird häufig j statt i verwendet!

[¶] Achtung: Der Imaginärteil von $z = 5 + 3\,i$, $\Im(5 + 3\,i)$, ist 3, und *nicht* $3\,i$

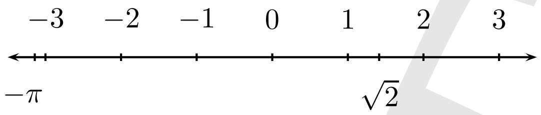


Abbildung 1: Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlengerade.

2.2 Addition und Subtraktion

Die grundlegende Regel für das Rechnen mit komplexen Zahlen läßt sich in etwa so formulieren: *Alle Rechenregeln behalten ihre Gültigkeit, wobei $i = \sqrt{-1}$ als nicht weiter vereinfachbarer, konstanter Faktor behandelt wird. Zum Schluß jeder Rechnung wird nach Termen mit und ohne i sortiert.* Für Addition und Subtraktion bedeutet dies:

$$(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d) \tag{6}$$

Am besten sieht man dies an ein paar Beispielen:

$$(5 + 3i) + (7 - 2i) = (5 + 7) + i(3 - 2) = 12 + i$$
$$(5 + 3i) - (7 - 2i) = (5 - 7) + i(3 - (-2)) = -2 + 5i$$

Anmerkung: Die Handhabung von i ist vergleichbar mit Rechnungen, in denen Faktoren, wie z.B. $\sqrt{2}$, nicht als Dezimalbruch angeschrieben werden, z.B., $(5 + 3\sqrt{2}) - (2 - \sqrt{2}) = 3 + 4\sqrt{2}$. Im Fall von irrationalen Zahlen können Sie natürlich den Taschenrechner nehmen, dann erhalten Sie $3 + 4\sqrt{2} \approx 8,65685\ldots$, bei der imaginären Zahl i geht das nicht.

2.3 Graphische Darstellung komplexer Zahlen

Bevor wir zu Multiplikation und Division komplexer Zahlen weitergehen, beschäftigen wir uns kurz mit der Darstellung komplexer Zahlen. Reelle Zahlen werden üblicherweise durch die bekannte Zahlengerade veranschaulicht (Abb. 1).

Für komplexe Zahlen nimmt man nun die zweite Dimension zu Hilfe und stellt sie in einem kartesischen Koordinatensystem dar, in dem der Realteil entlang der x-Achse und der Imaginärteil entlang der y-Achse aufgetragen wird. Dies ist in Abb. 2 für einige komplexe Zahlen veranschaulicht.

Man bezeichnet die Ebene, in der man sich komplexe Zahlen als Punkte veranschaulicht, als *Gaußsche Zahlenebene.*

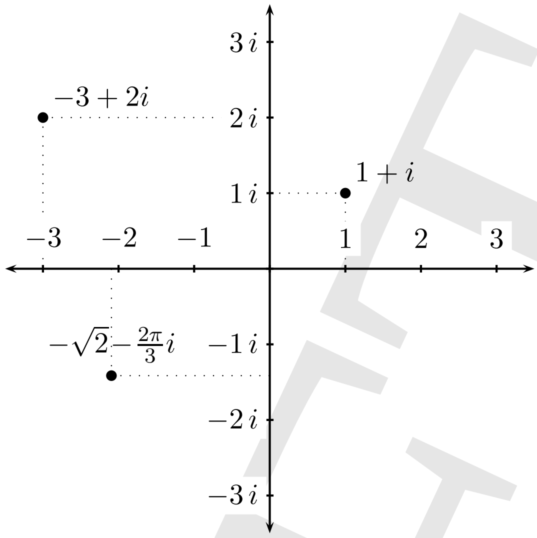


Abbildung 2: Gaußsche Zahlenebene.

2.4 Konjugiert komplexe Zahl

Durch Änderung des Vorzeichens des Imaginärteils einer komplexen Zahl $z = x + i\,v$ gewinnt man die zu z *konjugiert komplexe* Zahl $\bar{z} = x - i\,v$. Statt $\bar{z}$ schreibt man sehr oft auch z^*. Beispiele:

$$\begin{aligned} z &= 5 + 3i & \Rightarrow \quad \bar{z} &= 5 - 3i \\ z &= -2 + i & \Rightarrow \quad \bar{z} &= -2 - i \\ z &= 1 - 2i & \Rightarrow \quad \bar{z} &= 1 + 2i \end{aligned}$$

Wie in Abb. 3 illustriert gewinnt man in der Gaußsche Zahlenebene die konjugiert komplexe Zahl durch Spiegelung an der x-Achse.

2.5 Multiplikation und Division, kartesische Darstellung

Die bei Addition und Multiplikation besprochene “Rechenregel” erlaubt auch sofort das Ausführen von Multiplikationen, wobei beim Zusammenfassen von Real- und Imaginärteil des Ergebnis zu beachten ist, daß Terme, die i^2 enthalten, natürlich zu $i^2 = -1$ vereinfacht werden.[‖] Zuerst der allgemeine Ausdruck:

$$(a + i\,b) \times (c + i\,d) = a\,c + i\,b\,c + i\,a\,d + \underbrace{i^2}_{-1}\,b\,d = (a\,c - b\,d) + i(b\,c + a\,d), \tag{7}$$

[‖]Denken Sie wiederum an Ausdrücke, die z.B. $\sqrt{2}$ enthalten: $(1-2\sqrt{2})\times(2+\sqrt{2}) = 2-4\sqrt{2}+\sqrt{2}-2\sqrt{2}\sqrt{2} = -2-3\sqrt{2}$.

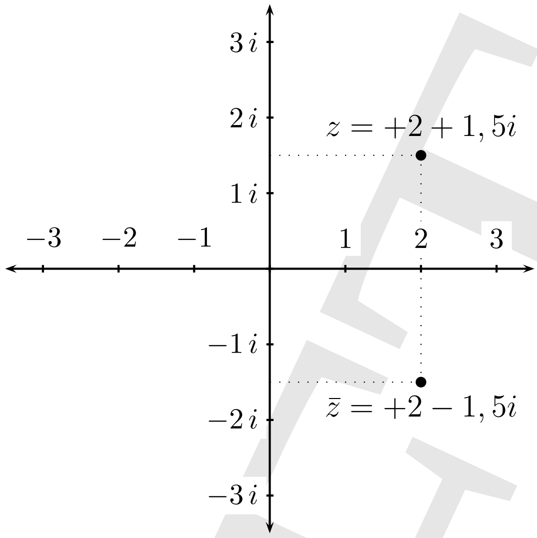


Abbildung 3: Konjugiert komplexe Zahl in der Gaußschen Zahlenebene.

gefolgt von ein paar Beispielen:

$$(1+i)\times(2+3i) = 2+2\,i+3\,i+3\,i^2 = (2-3)+i(2+3) = -1+5\,i$$
$$(1+i)\times(2-3i) = 2+2\,i-3\,i-3\,i^2 = (2+3)+i(2-3) = 5-i$$
$$(\sqrt{3}-i\,5\sqrt{2})\times(2\sqrt{2}+i\,\sqrt{3}) = 2\sqrt{6}-20\,i+3\,i-i^2\,5\sqrt{6} = 7\sqrt{6}-17\,i$$

Etwas komplizierter wird es bei der Division. Bei Ausdrücken wie

$$\frac{2+3i}{1-i} \qquad \text{(a)}$$

ist zunächst tatsächlich nicht ganz klar, was man tun soll. Fangen wir mit einer einfacheren Aufgabe an: Kann man

$$\frac{1}{i}$$

umformen bzw. vereinfachen? Brüche kann man bekanntlich umformen, indem man Zähler und Nenner mit demselben (von Null verschiedenen) Ausdruck erweitert. Im speziellen Fall bietet sich Multiplikation mit i an, d.h.

$$\frac{1}{i} = \frac{1\times i}{i\times i} = \frac{i}{-1} = -i$$

Im letzten Schritt haben wir ausgenützt, daß eine komplexe Zahl durch eine reelle Zahl dividiert wird, indem man Realteil und Imaginärteil durch diese Zahl dividiert. Ein weiteres Beispiel hierzu ist z.B.

$$\frac{2\sqrt{2}+6\,i}{\sqrt{2}} = 2+3\sqrt{2}\,i.$$

Um wie im allgemeinen Fall (a) durch eine komplexe Zahl dividieren zu können, müss(t)en wir also den Divisor (bzw. in Bruchschreibweise den Nenner) reell machen ohne den Wert des Ausdrucks zu ändern. Für $1/i$ war dies einfach (Erweitern mit i/i), aber womit soll man im allgemeinen Fall (a) erweitern? Ein wenig Probieren zeigt, daß die Multiplikation des Nenners von (a) mit der konjugiert Komplexen des Nenners eine reelle Zahl ergibt, $(1-i)\times(1+i) = 1-i+i-i^2 = 2$. Dieser Zusammenhang für das Produkt einer komplexen Zahl z mit seiner konjugiert komplexen Zahl $\bar{z}$ gilt ganz allgemein:

$$z \times \bar{z} = (x+i\,y)\times(x-i\,y) = x^2 + i\,x\,y - i\,x\,y - i^2y^2 = x^2+y^2 \tag{8}$$

Gl. 8 ist der Schlüssel für die gesuchte Divisionsvorschrift. *Um zwei komplexe Zahlen zu dividieren, erweitert man Zähler und Nenner mit der konjugiert Komplexen des Nenners, danach dividiert man den neuen Zähler durch den nunmehr reellen Faktor im Nenner.* Man bezeichnet den ersten Teilschritt auch als Reellmachen des Nenners. Für unser Beispiel (a) bedeutet dies:

$$\frac{(2+3i)}{1-i} = \frac{(2+3i)}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i} = \frac{-1+5i}{2} = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\,i$$

2.6 Betrag einer komplexen Zahl

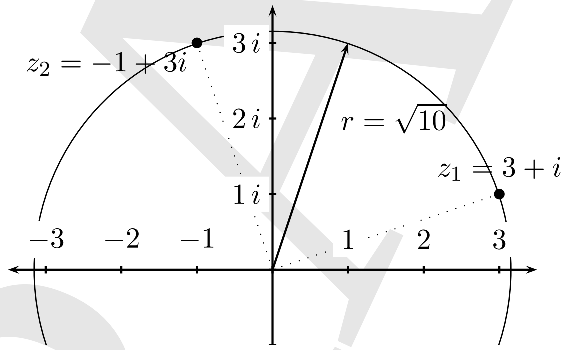


Abbildung 4: Zum Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl.

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist eine wichtige Erweiterung der vertrauten reellen Zahlen, da sie die Wurzel aus negativen Zahlen definiert.** Diese Erweiterung hat jedoch einen Preis. In $\mathbb{R}$ ist es in trivialer Weise möglich zu sagen, welche von zwei Zahlen a, $b \in \mathbb{R}$ die größere ist, d.h., ob z.B. a größer oder kleiner als b ist. In der Zahlengerade (Abb. 1) sieht man dies sofort, je nachdem ob b links oder rechts von a liegt. Man sagt, die reellen Zahlen sind *geordnet*.

Diese Eigenschaft geht in $\mathbb{C}$ verloren. Was ist größer: $z_1 = 3+i$ oder $z_2 = -1+3\,i$ (siehe Abb. 4)? Man könnte zwar Real- bzw. Imaginärteil der Größe nach ordnen, Aussagen wie $z_1 > z_2$ bzw. $z_1 < z_2$ sind jedoch nicht mehr möglich. Eine legitime Frage ist jedoch, welchen "Abstand" eine komplexe Zahl z vom Ursprung $0+0\,i$ der Gaußschen Zahlenebene hat (Abb. 4).

**Die Bedeutung der komplexen Zahlen in der höheren Mathematik ist noch viel weitreichender. Einen verblüffenden Zusammenhang zwischen Winkelfunktionen und der Exponentialfunktion eines imaginären Arguments werden wir in Kürze kennenlernen, und wir werden ihm (bzw. den komplexen Zahlen) im Kapitel über Differentialgleichungen nochmals begegnen. Dennoch kratzen wir hier bestenfalls an der Oberfläche ...

Wie Abb. 4 zeigt können wir den Abstand r nach dem Pythagoräischen Lehrsatz

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{9}$$

berechnen, d.h., für unsere beiden Zahlen in Abb. 4 finden wir

$$r_1 = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$r_2 = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

Man bezeichnet r auch als den *Betrag* $|z|$ der komplexen Zahl z. Kombiniert man Gln. 8 und 9, so sieht man, daß sich $r = |z|$ elegant mit Hilfe der konjugiert komplexen Zahl definieren läßt:

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \times \bar{z}} \tag{10}$$

Der Betrag $|z|$ gestattet eine gewisse "Sortierung" von komplexen Zahlen, unser Beispiel ($|3 + i| = |-1 + 3\,i| = \sqrt{10}$) zeigt jedoch, daß mehrere komplexe Zahlen den gleichen Betrag haben können. Genau genommen liegen auf jedem konzentrischen Kreis um den Ursprung der Gaußschen Zahlenebene unendlich viele komplexe Zahlen, deren Betrag (Abstand vom Ursprung) gleich ist.

2.7 Polardarstellung

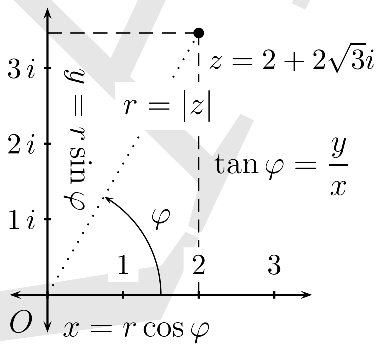


Abbildung 5: Polardarstellung einer komplexen Zahl $z = 2 + 2\sqrt{3}i$.

Im vorigen Abschnitt wurde bereits der Abstand r einer komplexen Zahl z vom Ursprung eingeführt. Nimmt man zusätzlich (s. Abb. 5) den Winkel φ zwischen der positiven reellen Halbachse und dem durch Oz definierten Strahl, so erhält man mit dem Paar $(r,\ \varphi)$ eine alternative Darstellung zur kartesischen Darstellung $(x,\,y)$ der komplexen Zahl z. Ein Punkt in der Gaußschen Zahlenebene, d.h. die Darstellung einer komplexen Zahl z, ist also nicht nur durch das kartesische Koordinatenpaar $(x,\,y)$ sondern auch durch die *Polarkoordinaten* $(r,\ \varphi)$ möglich.

Aus Abb. 5 liest man unmittelbar den Zusammenhang zwischen kartesischen und Polarkoordinaten ab,

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi. \tag{11}$$

Mit Gl. 11 erhalten wir für eine komplexe Zahl in Polardarstellung

$$z = x + i\,y = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)\,. \tag{12}$$

Gl. 11 enthält die Vorschrift, wie man aus einem Polarkoordinatenpaar $(r,\ \varphi)$ auf kartesische Koordinaten $(x,\ y)$ kommt. Z.B., die Polarkoordinaten $(r = \sqrt{2},\ \varphi = \pi/4)$[††] definieren die komplexe Zahl

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i.$$

(Für die speziellen Winkelwerte (z.B. $\cos(\pi/4)$) siehe die Formelsammlung Ihrer Wahl, z.B. [Bartsch, S. 120].)

Wie wir in Kürze sehen werden, hat die Polardarstellung komplexer Zahlen Vorteile, vor allem beim Potenzieren und Wurzelziehen. Wir müssen uns daher mit der Frage beschäftigen, wie wir die Polarkoordinaten $(r,\ \varphi)$ einer komplexen Zahl aus deren kartesischen Koordinaten $(x,\ y)$ gewinnen. Nachdem dieser Schritt leider erfahrungsgemäß große Schwierigkeiten bereitet, wollen wir ihn uns in Ruhe ansehen. (Falls Sie die Umrechnung von kartesischer auf Polardarstellung beherschen, können Sie direkt zum Abschnitt 2.8 auf S. 12 weiterblättern.)

Betrachten wir als Beispiel (s. Abb. 5) die Zahl

$$z = 2 + i\,2\sqrt{3}.$$

Den Abstand r erhält man gemäß Gl. 9, d.h.,

$$r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Für den Winkel φ (s. Abb. 5) gilt weiters die Gleichung

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \tag{13}$$

— das ist eine der Definitionen des Tangens! Für unser Beispiel heißt das

$$\tan\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

Den Winkel φ selbst erhalten wir durch Anwenden der Umkehrfunktion arctan auf den Quotienten y/x,

$$\varphi = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

Für das praktische Rechnen sollte man immer zuerst in einer Tabelle spezieller Winkelwerte nachsehen, und erst danach die arctan-Funktion des Taschenrechners bemühen. Für unser Beispiel erhalten wir also die Polardarstellung

$$z = 2 + i\,2\sqrt{3} = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

[††] *Zur Erinnerung:* Der Zusammenhang zwischen Radiant (dem natürlichen Winkelmaß) und Grad ist durch $1^\circ = \pi/180$ gegeben. Überprüfen Sie beim praktischen Rechnen, ob Ihr Taschenrechner für die Auswertung von Winkelfunktionen Grad oder Radiant erwartet!

Aber halt! — es ist leider nicht immer ganz so einfach. Der Tangens ist eine periodische Funktion mit Periode π ($= 180°$). Da

$$\tan\frac{\pi}{3} = \tan\frac{4\pi}{3} = \tan\frac{7\pi}{3} = \ldots = \sqrt{3}$$

bzw. ganz allgemein

$$\tan\varphi = \tan(\varphi + k\pi) \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}$$

gilt, ist die Anwendung der Umkehrfunktion arctan nicht eindeutig. Das daraus entstehende Problem sieht man am besten daran, wenn man statt $2 + i\,2\sqrt{3}$ die Zahl $-2 - i\,2\sqrt{3}$ in Polarkoordinaten darstellen will. Für r ändert sich nichts, denn $r = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$ wie gehabt. Aus

$$\tan\varphi = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}$$

erhält man aber bei naiver Anwendung des Taschenrechners (arctan(1.732050807)) nach wie vor $\varphi = 60°$, was offensichtlich(*Skizze!*) nicht stimmen kann. Nein, werfen Sie Ihren Taschenrechner nicht weg, dieses "unsinnige" Ergebnis ist eine Konsequenz der Periodizität des Tangens. Man kann derartige Fehler wie folgt vermeiden:

Machen Sie als allererstes eine Skizze, und notieren Sie, in welchem Quadranten Sie sich befinden ($-2 - i\,2\sqrt{3}$ liegt im III. Quadranten (zwischen 180 und 270 Grad!)). Danach rechnen Sie r und φ gemäß Gln. 9 und 13 mittels Tabelle bzw. Taschenrechner aus. Überprüfen Sie, ob der auf diese Art ermittelte Polarwinkel φ im gleichen Quadranten liegt, wie der Quadrant, den Sie aus Ihrer Skizze ablesen. Wenn ja, ist alles in Ordnung (dies ist in unserem ersten Beispiel, $z = 2 + i\,2\sqrt{3}$, der Fall). *Wenn nein*, so addieren Sie $\pi = 180°$ zu φ. Für $z = -2 - i\,2\sqrt{3}$ liefert Anwendung der arctan-Funktion den ersten Quadranten ($\pi/3$ bzw. $60°$), was offensichtlich falsch ist. Durch Addition von π

$$\varphi = \arctan\sqrt{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

erhält man den zweiten Winkelwert $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ dessen Tangens gleich $\sqrt{3}$ ist. Dieser Winkel, $4\pi/3 = 240°$, liegt in Übereinstimmung mit der Skizze im III. Quadranten und ist der gesuchte Polarwinkel. Somit erhalten wir die Polardarstellung

$$z = -2 - i\,2\sqrt{3} = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Anmerkung: Für rein imaginäre Zahlen können Sie den Polarwinkel nicht mit der arctan Formel berechnen, da ($\Re(z) = x = 0$) auf eine Division durch 0 führen würde. Es ist hoffentlich einleuchtend, daß der Polarwinkel in diesem Fall $\pi/2 = 90°$ für positive y Werte und $3\pi/2 = 270° = -90°$ für negative y Werte sein muß (*Skizze*)!

(Für Leute, die partout keine Skizzen wollen): Wenn man mit dem Verhalten und dem Aussehen des Tangens vertraut ist, kann man auch auf Skizzen verzichten. Berechnen Sie r wie gehabt. Den Polarwinkel berechnen Sie unter Berücksichtigung des Vorzeichens des Realteils x der komplexen Zahl $z = x + iy$ gemäß

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & &\text{für } x > 0 \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & &\text{für } x < 0 \end{aligned}$$

Dieses Verfahren geht solange gut als die arctan Funktion ihres Taschenrechners (wie sie es sollte) Werte im Bereich $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ (den sogenannten Hauptwert) liefert — bitte *testen* Sie das Verhalten Ihres Taschenrechners!

Fig. 6 illustriert nochmals die Umrechnung von kartesischen auf Polarkoordinaten für komplexe Zahlen in allen vier Quadranten. *Bitte denken und rechnen Sie diese Beispiele unbedingt selbstständig durch!*

2.8 Die Eulersche Formel

Nach diesem Exkurs über die Umrechnung von kartesischen Koordinaten auf Polarkoordinaten stellen wir jetzt die zentrale Beziehung für das Rechnen mit komplexen Zahlen in Polarkoordinaten, die sogenannte Eulersche Formel, vor. Es gilt nämlich folgender verblüffender Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion eines rein imaginären Arguments $i\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) und den Winkelfunktionen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$:

$$e^{i\,\alpha} = \cos\alpha + i\,\sin\alpha. \tag{14}$$

Der Beweis wird uns erst in einem späteren Kapitel möglich sein, die Nützlichkeit der Beziehung wird hoffentlich ehebaldigst klar werden. Mit Gl. 14 können wir Gl. 12 auch in der Form

$$z = x + i\,y = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) = r\,e^{i\varphi} \tag{15}$$

schreiben.

2.9 Multiplikation und Division in Polardarstellung

Als erste Anwendung von Gl. 15 wollen wir jetzt zwei komplexe Zahlen $z_1 = a + i\,b$, $z_2 = c + i\,d$ in Polardarstellung multiplizieren bzw. dividieren. Es seien

$$z_1 = a + i\,b = r_1\,e^{i\varphi_1}$$

$$z_2 = c + i\,d = r_2\,e^{i\varphi_2}$$

Dann ist nach den Rechenregeln für die Exponentialfunktion

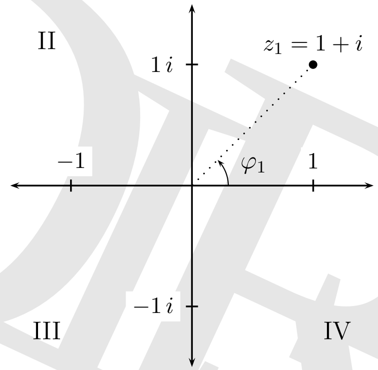
$$z_1 \times z_2 = r_1\,e^{i\varphi_1} \times r_2\,e^{i\varphi_2} = (r_1\,r_2)\,e^{i\varphi_1}\,e^{i\varphi_2} = (r_1\,r_2)\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} =$$

$$(r_1\,r_2)\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

und

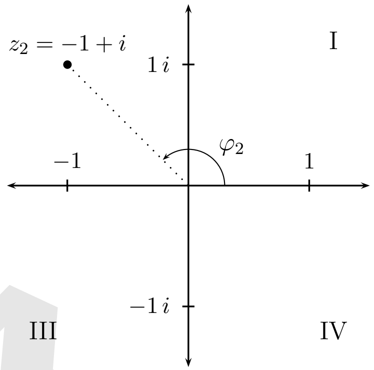
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\,e^{i\varphi_1}}{r_2\,e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\,e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\,(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1-\varphi_2))\,.$$

In Polarkoordinaten multipliziert man also zwei komplexe Zahlen, in dem man ihre Beträge multipliziert und ihre Polarwinkel addiert. Division bedeutet Dividieren der Beträge und Subtraktion der Polarwinkel.



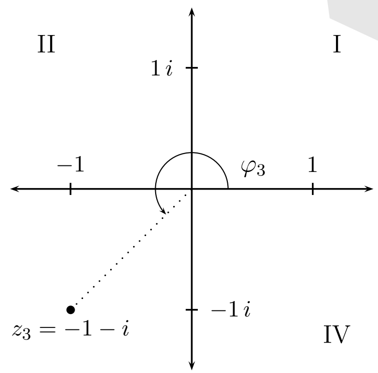
$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
$\varphi_1 = \arctan(1/1) = \pi/4$
$\Rightarrow$ I. Quadrant? — OK
und somit

$\boxed{z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$



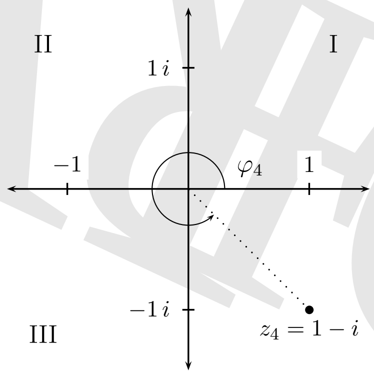
$r_2 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
$\varphi_2 = \arctan(1/(-1)) = -\pi/4$
$\Rightarrow$ IV. Quadrant? — FALSCH!
daher $\varphi_2 = -\pi/4 + \pi = 3\pi/4$

$\boxed{z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$



$r_3 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
$\varphi_3 = \arctan((-1)/(-1)) = \pi/4$
$\Rightarrow$ I. Quadrant? — FALSCH!
daher $\varphi_3 = \pi/4 + \pi = 5\pi/4$

$\boxed{z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}}$



$r_4 = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
$\varphi_4 = \arctan((-1)/1) = -\pi/4 =$
$= 7\pi/4$
$\Rightarrow$ IV. Quadrant? — OK
und somit

$\boxed{z_4 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}}$

Abbildung 6: Umrechnung in Polardarstellung für Beispiele in allen 4 Quadranten (römischen Ziffern). Die Bedeutung der Exponentialfunktion ist in Abschnitt 2.8 erklärt.

2.10 Potenzieren

Als nächstes wollen wir komplexe Zahlen potenzieren. Gesucht sei das Quadrat von $1 + i\sqrt{3}$. Nichts leichter als das,

$$(1 + i\sqrt{3})^2 = (1 + i\sqrt{3}) \times (1 + i\sqrt{3}) = -2 + i\,2\sqrt{3}$$

Da wir multiplizieren können, können wir auch potenzieren. Allerdings wird es mühsam, wenn wir z.B.

$$(1 + i\sqrt{3})^{25}$$

berechnen sollen. Es ist zwar prinzipiell klar, was zu machen ist, aber in kartesischer Darstellung ist der Rechenaufwand nicht akzeptabel.

Da sich in diesem Fall die kartesische Darstellung als mühsam erweist, probieren wir die Rechnung in Polardarstellung durchzuführen. Mittlerweile sollte für Sie die Umrechnung (Abschnitt 2.7) $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\exp(i\pi/3)$ Routine sein. Somit haben wir

$$(1 + i\sqrt{3})^{25} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{25} = 2^{25}\, e^{i\frac{25\pi}{3}} = 33554432\, e^{i\frac{25\pi}{3}} = 33554432\, e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Der erste Schritt folgt aus den Rechenregel für Potenzen.* Um den letzten Schritt zu verstehen, denken Sie an die Definitionsgleichung 14 und an die Tatsache, daß Sinus und Kosinus die Periode 2π ($= 360°$) haben — z.B. $\sin(370°) = \sin(10°)$ usw. Ganz allgemein gilt ja

$$e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi}\, e^{i2\pi} = e^{i\varphi}\left(\underbrace{\cos 2\pi}_{1} + i\underbrace{\sin 2\pi}_{0}\right) = e^{i\varphi}.$$

Wegen $25\pi/3 = \pi/3 + 8\pi = \pi/3 + 4 \times (2\pi)$ folgt die letzte Vereinfachung. Die Rückrechnung auf kartesische Darstellung erfolgt jetzt problemlos mittels Gl. 14 bzw. 15 — Tabelle spezieller Winkelfunktionswerte verwenden!

$$33554432\, e^{i\frac{\pi}{3}} = 33554432\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}\right) = 33554432\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16777216\left(1 + i\sqrt{3}\right).$$

Anmerkung: Die Eulersche Formel Gl. 14 bzw. 15 wird (normalerweise) in der Mittelschule nicht unterrichtet. Falls Sie überhaupt Potenzieren von komplexen Zahlen in der AHS durchgenommen haben,† so haben Sie vermutlich die Moivresche Formel

$$z^n = (r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi))^n = r^n\,(\cos(n\varphi) + i\,\sin(n\varphi))$$

benutzt. *Sie können natürlich auch weiterhin so rechnen!* Da die Eulersche Formel jedoch von prinzipieller Wichtigkeit ist, und Rechnen mit Exponentialfunktionen viel einfacher ist als Rechnen mit Winkelfunktionen (der Satz von Moivre ist ja keinesfalls unmittelbar einsichtig, es sei denn man verwendet den Eulerschen Satz!), empfehle ich den hier gezeigten Rechenweg zu verwenden.

*Zur Erinnerung: $(e^a)^b = e^{a\,b}$

†Das Folgende gilt sinngemäß auch für Multiplikation und Division von komplexen Zahlen in Polardarstellung, sowie für das Wurzelziehen.

2.11 Wurzelziehen

Während Potenzieren komplexer Zahlen in kartesischer Darstellung noch prinzipiell möglich war, so ist für das Wurzelziehen das Umrechnen in Polarkoordinaten unumgänglich. Betrachten wir als Beispiel die Gleichung

$$z^4 = -8 + i\,8\sqrt{3} \quad \text{d.h.} \quad z = \left(-8 + i\,8\sqrt{3}\right)^{1/4}.$$

Als erstes wandeln wir in Polardarstellung um

$$r = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16$$

$$\tan\varphi = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$$

(Bitte zeichnen Sie eine Skizze, um sich von der Richtigkeit des II. Quadranten zu überzeugen — Ihr Taschenrechner liefert Ihnen vermutlich $-\pi/3$, d.h. den IV. anstatt des II. Quadranten!)

Mit Hilfe der Eulerschen Formel gelangen wir jetzt ganz leicht auf

$$\left(-8 + i\,8\sqrt{3}\right)^{1/4} = \left(16\, e^{i\,2\pi/3}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{16}\, e^{i\,\frac{2\pi}{3}\frac{1}{4}} = 2\, e^{i\pi/6}.$$

Unser Ergebnis ist zwar nicht falsch, aber auch nicht vollständig. Beim Potenzieren nutzten wir die Periodizität von 2π in $e^{i\varphi}$ aus, um (in unserem Beispiel) $\exp(i\,25\pi/3)$ zu $\exp(i\,\pi/3)$ zu vereinfachen. Beim Wurzelziehen hingegen muß man bedenken, daß obgleich

$$16\, e^{i\,2\pi/3} = 16\, e^{i\,(2\pi/3+2\pi)} = 16\, e^{i\,(2\pi/3+4\pi)} = \ldots,$$

die entsprechenden vierten Wurzeln

$$\left(16\, e^{i\,2\pi/3}\right)^{1/4}, \quad \left(16\, e^{i\,(2\pi/3+2\pi)}\right)^{1/4}, \quad \left(16\, e^{i\,(2\pi/3+4\pi)}\right)^{1/4}, \ \ldots$$

nicht alle gleich sind. Es gibt genau vier verschiedene Lösungen

$$z_1 = \left(16\, e^{i\,2\pi/3}\right)^{1/4} = 2\, e^{i\pi/6} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = \left(16\, e^{i\,(2\pi/3+2\pi}\right)^{1/4} = 2\, e^{i2\pi/3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\,\sqrt{3}$$

$$z_3 = \left(16\, e^{i\,(2\pi/3+4\pi}\right)^{1/4} = 2\, e^{i7\pi/6} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$z_4 = \left(16\, e^{i\,(2\pi/3+6\pi}\right)^{1/4} = 2\, e^{i5\pi/3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\,\sqrt{3}$$

$$z_5 = \left(16\, e^{i\,(2\pi/3+8\pi}\right)^{1/4} = 2\, e^{i13\pi/6} = 2\, e^{i\pi/6} = z_1,$$

alle weiteren Lösungen (wie für z_5 gezeigt) sind nur periodische Vielfache (also unterscheiden sich von den genuinen Lösungen nur um einen Faktor $e^{i\,k2\pi} = 1,\ k \in \mathbb{Z}$).

Aus dem im nächsten Abschnitt kurz besprochenen Fundamentalsatz der Algebra folgt, daß jede Gleichung der Form

$$z^n = x + i\,y \Leftrightarrow z = (x + i\,y)^{1/n}$$

in $\mathbb{C}$ n Lösungen hat. Die allgemeine Rechenregel ist wie folgt:

$$z = (x + i\,y)^{1/n} = \left(r\,e^{i\,(\varphi + k\,2\pi)}\right)^{1/n} = \sqrt[n]{r}\,e^{i\,\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k\,2\pi}{n}\right)}$$

mit

$$k = 0,\,1,\,2,\dots,\,n-1.$$

Im obigen Beispiel ist $n = 4$, und die Lösungen z_1–z_4 entsprechen genau den Fällen $k = 0,\,1,\,2$ und 3. Weiters sieht man, daß man mit $k = n$ genau einen Faktor $\exp(i2\pi) = 1$ einführt, und daß man somit für $k \geq n$ keine weiteren genuinen Lösungen mehr erhält.

2.12 Diverses

Zum Abschluß noch zwei Anmerkungen, die thematisch hierher passen.

Ergänzungen zum Eulerschen Satz: Wenn man ein wenig mit dem Eulerschen Satz (Gl. 14) spielt, so kann man viele Beziehungen zwischen Winkelfunktionen (z.B. die sogenannten Summensätze) sehr elegant ableiten. Wir wollen hier nur noch quasi die Umkehrung von Gl. 14 vornehmen, d.h., Sinus und Cosinus in Termen der komplexen Exponentialfunktion ausdrücken. Wir verwenden hierzu

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi \qquad \text{(I)}$$

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\,\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\,\sin\varphi \qquad \text{(II)},$$

der letzte Schritt folgt aus den Rechenregeln für Sinus und Cosinus [Bartsch, S. 120]. Addiert man jetzt (I) und (II), so erhält man

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi$$

(die Sinusterme heben sich weg) bzw.

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}. \tag{16}$$

Subtrahiert man hingegen (II) von (I), so erhält man

$$\mathrm{II} - \mathrm{I} = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\,\sin\varphi$$

oder

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{17}$$

Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom n-ten Grades ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

$$P_n(x) := x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0, \qquad x \in \mathbb{C}$$

mit beliebigen komplexen Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ läßt sich als Produkt von Linearfaktoren schreiben, d.h., es gilt für alle $x \in \mathbb{C}$ eine Identität

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

mit geeigneten komplexen Zahlen $x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n$.

3 Anmerkungen zum Funktionsbegriff

Obwohl $\mathbb{C}$ der vollständigste und formal befriedigendste Zahlenraum ist, so bleiben die reellen Zahlen der für die Naturwissenschaften wichtigste Zahlenbereich. Wir beschränken uns daher von jetzt an (wenn nicht anders erwähnt) auf $\mathbb{R}$.* Dieses Minikapitel beginnt mit einigen Bemerkungen zu Funktionen, sowie Hinweisen zur Bestimmung des Definitionsbereichs. Danach folgen Erläuterungen zu in Zusammenhang mit Funktionen häufig gebrauchten Begriffen, wie z.B. Monotonie oder Periodizität. Diese verstehen sich als Hintergrundinformation und sind zur Ergänzung der oft minimalistischen Definitionen in Formelsammlungen gedacht z.B. [Bartsch, S. 107, 110–111, 140].

Die Schreibweise

$$y = f(x) = x^2 \tag{18}$$

sollte Ihnen vertraut sein. Die obige Zeile besagt, daß die Variable y eine Funktion (daher f) der Variablen x ist, $y = f(x)$, gefolgt von der eigentlichen Vorschrift, wie man y aus x zu gewinnen hat. Man bezeichnet x als unabhängige, y als abhängige Variable.

x	$f(x) = x^2$
-3,00	9,00
-2,00	4,00
-1,00	1,00
-0,10	0,01
0,00	0,00
1,00	1,00
2,00	4,00
2,50	6,25

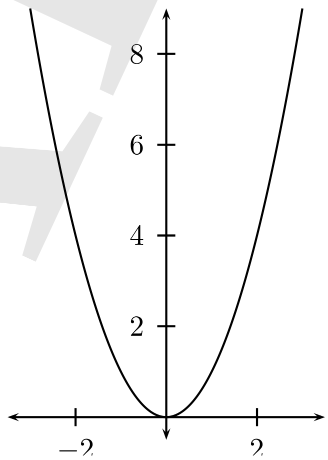


Abbildung 7: Wertetabelle für $y = f(x) = x^2$ und graphische Darstellung.

In den Naturwissenschaften trifft man ständig auf Gesetzmäßigkeiten, die angeben wie eine Kenngröße (Druck, Reaktionsgeschwindigkeit usw.) von anderen Größen abhängt. Als Beispiel möge das *ideale Gasgesetz* dienen. (Den meisten von Ihnen sollte es von der Mittelschule bekannt sein, wenn nicht, werden Sie in Kürze in der Allgemeinen Chemie damit Bekanntschaft machen). Das Volumen eines verdünnten Gases hängt (in guter Näherung) V wie folgt vom Druck p, der Molmenge n und der Temperatur T ab:

$$V = \frac{nRT}{p} = V(n,\, T,\, p)$$

Die Gaskonstante R hat den Wert $8.31434\ \mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$. Das Volumen ist also eine Funktion von drei Größen, d.h. Variablen. Vorläufig wollen wir uns jedoch auf Funktionen einer reellen Variablen beschränken. Man kann beliebige Symbole für diese Variable verwenden. In der Mathematik verwendet man gerne x, an diese Konvention haben wir uns in Gl. 18 gehalten. Das

*Wichtige Ausnahme: Bei den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten werden wir der komplexen Exponentialfunktion $e^{i\varphi}$ wieder begegnen!

Beispiel des idealen Gasgesetzes zeigt jedoch, daß man in den Naturwissenschaften Variablen gerne mit (halbwegs) “sprechenden” Abkürzungen versieht (V … “Volume”, p … “pressure” usw.) Die Bezeichnungen von Variablen sind (fast) immer irrelevant, die folgenden drei Zeilen besagen dasselbe!

$$y = f(x) = x^2 = y(x)$$

$$v = v(u) = u^2$$

$$\text{hansi} = \text{seppi}^2$$

Was hingegen wichtig ist, und was eine Funktion erst zu einer Funktion macht, ist die Eindeutigkeit, mit der jedem Wert der unabhängigen Variablen x (oder u oder seppi) der Funktionswert $y = f(x)$ (oder $v = v(u)$ oder hansi = hansi(seppi)) zugewiesen wird. Achtung: Eindeutigkeit heißt nicht, daß mehrere Werte der unabhängigen Variablen nicht zum gleichen Funktionswert führen können (für unsere Beispielsfunktion Gl. 18 gilt z.B. $f(5) = f(-5) = 25$). Die Vorschrift, wie aus x (z.B. $x = 5$) $f(x)$ berechnet wird, hat eindeutig zu sein. Für $f(x) = x^2$ (Gl. 18) gibt es kein Problem, hingegen muß man für $f(x) = \sqrt{x}$ u.U. klar machen, ob man den positiven ($f(x) = +\sqrt{x}$) oder negativen Ast ($f(x) = -\sqrt{x}$) der Wurzel meint.

Es sollte erwähnt werden, daß Definitionen der Form $y = f(x)$ nicht die einzige Möglichkeit sind, Funktionen darzustellen (siehe auch Abb. 7). Gerade im Meßprozeß erhält man ja oft eine Funktion als Tabelle von Funktionswerten (Meßwerten), aus denen dann ggf. eine mathematische Definitionsgleichung deduziert wird. Des weiteren ist die graphische Darstellung von Funktionen zu erwähnen — hier sind übrigens Tabellenkalkulationsprogramme, Computeralgebrasysteme und Taschenrechner mit großen Displays wirklich eine große Hilfe, um sich rasch Funktionen darstellen zu lassen.

Alle x-Werte, denen sich mittels einer Funktion $f(x)$ y-Werte zuordnen lassen, bilden den *Definitionsbereich* (oder Definitionsmenge) D von $f(x)$. Die Gesamtheit aller möglichen y-Werte bezeichnet man als *Wertebereich* (oder Wertemenge) W. Im Sinne der einführend erwähnten Selbstbeschränkung auf $\mathbb{R}$ lassen wir für D und W maximal die reellen Zahlen zu. Besonders bei D muß man aber auf zusätzliche Einschränkungen aufpassen, und Kenntnis (Bestimmung) des Definitionsbereich ist ein wichtiger Punkt zum Verständnis einer interessierenden Funktion. Betrachten wir ein paar Beispiele. Für

$$f(x) = 5x \quad \text{gilt} \quad D = \mathbb{R} \quad \text{und} \quad W = \mathbb{R}.$$

Für

$$f(x) = x^2 \quad \text{gilt} \quad D = \mathbb{R}, \quad \text{aber} \quad W = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}.$$

In beiden Fällen ist $D = \mathbb{R}$. Interessanter wird es bei

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

Da die Division durch 0 nicht definiert ist, muß 0 ausgeschlossen werden. Ähnlich verhält es sich mit

$$f(x) = \ln x \qquad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\},$$

hier müssen 0 und alle negativen Argumente vom Definitionsbereich ausgeschlossen werden. Etwas anders verhält es sich bei

$$f(x) = +\sqrt{x} \qquad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

D darf keine negativen Zahlen beinhalten, weil in diesem Fall der Funktionswert negativ würde, dies widerspräche der vorausgesetzten Selbstbeschränkung auf reelle Funktionen.†

Die Regeln zur Bestimmung des Definitionsbereichs lassen sich in etwa wie folgt zusammenfassen:

1. Es müssen diejenigen x-Werte ausgeschlossen werden, die zu "verbotenen" Operationen (Division durch 0, $\ln 0$, $\tan \frac{\pi}{2}$ usw.) führen würden.
2. Es müssen weiters x-Werte (Bereiche) ausgeschlossen werden, für die die Funktion zwar prinzipiell durchgeführt werden kann, aber ein komplexer y-Wert entstehen würde.
3. Zusätzliche (nicht mathematisch bedingte) Einschränkungen, die sich aus der Problemstellung ergeben.

Um den letzten Punkt zu erläutern, ist es hilfreich ein banales Alltagsbeispiel zu betrachten: Sie kaufen in der Wurstabteilung des Supermarkts g Gramm Extrawurst. Dann ist der Gesamtpreis p, den Sie zu zahlen haben, eine Funktion des Gewichts g, d.h.,

$$p(g) = \mathfrak{p}_{\textit{Extrawurst}} \times g,$$

also Einzelpreis von Extrawurst $\mathfrak{p}_{\textit{Extrawurst}}$ (Preis pro Gewichtseinheit) mal Gewicht. Aus mathematischer Sicht ist der Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Nur, Sie können weder 0 g noch negative Wurstmengen kaufen. Im Kontext der Problemstellung sind also nur x-Werte > 0 sinnvoll. Weiters, wenn Sie (aus welchem Grund auch immer) 50 kg Extrawurst kaufen wollten, dann gehen Sie nicht in den Supermarkt, sondern zum Großhändler, und es ändert sich (hoffentlich) $\mathfrak{p}_{\textit{Extrawurst}}$. In diesem Sinn gibt es also auch eine Obergrenze für x, ab der die Funktion nicht mehr zutrifft (d.h., ab der die mathematische Abstraktion die Realität nicht mehr beschreibt).

Beim Studium der Kinetik biochemischer Reaktionen haben Sie mit Funktionen zu tun, die das Zeitverhalten von Stoffmengen (bzw. Konzentrationen) beschreiben. Typisch sind z.B. Funktionen der Form $c(t) = c_0 \exp(-t/\tau)$, d.h., die Konzentration c als Funktion der Zeit t ist proportional einer negativen Exponentialfunktion. Derartige Funktionen sind Abstraktionen von Messungen, in denen die Konzentration zum Zeitpunkt $t = 0, 1, 2, \ldots$ [Zeiteinheiten] gemessen wird. Obwohl die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, ist der effektive Definitionsbereich $x \geq 0$.

Im folgenden noch ein paar Anmerkungen zu in Zusammenhang mit Funktionen häufig gebrauchten Ausdrücken bzw. Definitionen.

Implizite Darstellung: Funktionsdarstellungen der Form von Gl. 18, d.h. $y = f(x)$, bezeichnet man als explizite Darstellungen der Funktion. Wir können aber im Prinzip den gleichen Zusammenhang wie in Gl. 18 auch in der Form

$$y - x^2 = 0 = F(x, y) \tag{19}$$

darstellen, dies bezeichnet man als *implizite* Darstellung der Funktion. Ein etwas komplizierteres Beispiel wäre

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad -1 \leq x \leq +1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

†Übrigens ist der Logarithmus von negativen Zahlen ähnlich wie die Wurzel negativer Zahlen in $\mathbb{C}$ wohl definiert, $\ln 0$ ist hingegen ähnlich wie $1/0$ auch in $\mathbb{C}$ undefiniert.

(Mit etwas Überlegen sollten Sie sehen, daß diese Funktion die obere Hälfte des Einheitskreises beschreibt.) Die implizite Darstellung von Funktionen mag Ihnen eher unnütz vorkommen, ist jedoch in der Praxis vonnöten, wenn der Zusammenhang zwischen y und x derart ist, daß die Auflösung nach y schwierig oder sogar unmöglich ist (z.B. $y^2 + \sin y = 2x^2 + C$).

Monotonie: Man spricht von einer *monoton wachsenden* bzw. *monoton fallenden* Funktion, wenn sie im Definitionsbereich für beliebige Argumente x_1 und x_2 mit $x_2 > x_1$ der Bedingung

$$f(x_2) \geq f(x_1) \qquad \text{bzw.} \qquad f(x_2) \leq f(x_1) \tag{20}$$

genügt. Monotonie kann auch auf Teilbereichen des Definitionsbereichs untersucht werden. Gilt nirgendwo das Gleichheitszeichen, d.h.

$$f(x_2) > f(x_1) \qquad \text{bzw.} \qquad f(x_2) < f(x_1)$$

dann spricht man von *streng* monotonen Funktionen. $y = e^{-x}$ ist z.B. streng monoton fallend, $y = \ln x$ ist streng monoton wachsend.

Beschränktheit: Funktionen heißen nach *oben beschränkt*, wenn ihre Werte eine *obere Schranke* nicht übertreffen (Beispiel: $y = 1 - x^2$, $y \leq 1$), und nach *unten beschränkt*, wenn ihre Werte nicht kleiner als eine bestimmte Zahl (untere Schranke) sind (Beispiel: $y = e^x$, $y > 0$). Ist eine Funktion nach oben und unten beschränkt, dann nennt man sie schlechthin beschränkt (Beispiel: $y = \sin x$, $-1 \leq y \leq 1$).

Extremwerte: Die Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D hat an der Stelle a ein *absolutes* oder *globales Maximum*, wenn für alle $x \in D$ gilt

$$f(a) \geq f(x). \tag{21}$$

Gilt hingegen

$$f(a) \leq f(x), \tag{22}$$

so spricht man von *absolutem* oder *globalem Minimum*. Gelten Gln. 21 bzw. 22 nur für alle x aus einem Bereich $a - \epsilon < x < a + \epsilon$, $\epsilon > 0$, so spricht man von einem *lokalen* Maximum bzw. Minimum. Achtung: Die Begriffe Maxima und Minima (Extremwerte) sind nicht an die Differenzierbarkeit gebunden, so hat die Betragsfunktion $y = |x|$ an der Stelle $x = 0$ ein globales Minimum, obwohl sie an dieser Stelle nicht differenzierbar ist.

Gerade / Ungerade Funktionen (Symmetrie): Funktionen, die der Beziehung

$$f(-x) = f(x) \tag{23}$$

genügen bezeichnet man als *gerade* Funktionen. Gilt hingegen

$$f(-x) = -f(x), \tag{24}$$

so spricht man von *ungeraden* Funktionen. $y = \cos x$ und $y = x^4 - x^2$ sind Beispiele für gerade, $y = \sin x$ und $y = x^3 + x$ sind Beispiele für ungerade Funktionen.

Periodische Funktionen genügen der Bedingung ($T \neq 0$)

$$f(x + T) = f(x) \tag{25}$$

Die kleinste positive Zahl, die Gl. 25 erfüllt heißt *Periode*. Alle Winkelfunktionen sind periodische Funktionen — was ist ihre Periode?[‡]

Umkehrfunktionen:[§] Wenn man

$$y = f(x)$$

nach x auflösen kann, d.h. wenn man

$$x = \phi(y) = f^{-1}(y)$$

bilden kann, so bezeichnet man f^{-1} als Umkehrfunktion von f. Es gilt

$$f(f^{-1}(y)) = y \qquad \text{und} \qquad f^{-1}(f(x)) = x \tag{26}$$

Beispiele für derartige Paare sind e^x und $\ln y$, sowie z.B. $\sin x$ und $\arcsin x$. Beim Definitionsbereich von Umkehrfunktionen ist Vorsicht geboten. Für ein Intervall $I \in D$ einer Funktion f existiert jedenfalls dann die Umkehrfunktion f^{-1} auf diesem Intervall, wenn f auf I streng monoton ist. Eine graphische Darstellung der Umkehrfunktion gewinnt man durch Spiegelung von f an der 45° Diagonale, d.h., an der Kurve $y = x$.

[‡] 2π für Sinus und Cosinus, π für Tangens und Cotangens!

[§] Dies ist ein nicht trivialer Punkt, und obiger Absatz dient im wesentlichen der Begriffsbildung. Weitere Details entnehmen Sie bitte Ihrem Mittelschullehrbuch.

4 Differentialrechnung

Die Erfahrung der letzten Jahre hat gezeigt, daß im Bereich der Differentialrechnung noch vergleichsweise das meiste Wissen aus der Mittelschulzeit vorhanden ist. Dies rechtfertigt die Präsentation des Stoffes in Form einer Rekapitulation denn einer stufenweise Einführung.

Stetigkeit und Grenzwert werden nur in dem Ausmaß und ohne Anspruch auf mathematische Genauigkeit behandelt, als sie für das Verständnis von Differentiation (und auch Integration) nötig sind.

Vorausgesetzte Kenntnisse: Wenngleich im folgenden Eigenschaften von Winkelfunktionen, Exponentialfunktion und Logarithmus, vor allem was das Bilden der Ableitungsfunktion betrifft, wiederholt werden, so werden die Rechenregeln für diese Funktionen als bekannt vorausgesetzt.

4.1 Berechnung der Ableitung — eine Vorausschau

In den Naturwissenschaften interessiert man sich für die Werte bestimmter Größen (Geschwindigkeit, Größe einer Population, Konzentration, Druck usw.), sowie für die *Änderungen* dieser Größen, wenn man von einem Zustand des Systems zu einem anderen wechselt. Mit anderen Worten, man interessiert sich für die Geschwindigkeit bzw. den Grad einer Änderung als Funktion der Zeit oder anderer physikalischer Größen. Das prototypische Beispiel in der Physik ist die Geschwindigkeit, andere physikalische Anwendungen sind Änderungen der Dichte, des Stroms, der Wärmeleitung und vieles mehr. In der Biochemie ist z.B. die Rate von Konzentrationsänderungen bei Enzymreaktionen von großer Wichtigkeit, da sie Hinweise für den Reaktionsmechanismus geben kann. Für Biologen ist die Änderung der Anzahl von Individuen einer Tier oder Pflanzenpopulation als Funktion der Zeit von Bedeutung. Sogar in der Soziologie treten bei der Untersuchung der Ausbreitung von Gerüchten (Moderescheinungen usw.) derartige Fragestellungen auf. Der zu Grunde liegende mathematische Apparat ist die *Differentialrechnung*, und mit dieser wollen wir uns im folgenden beschäftigen.

Um zu illustrieren was gemeint ist, untersuchen wir als Beispiel wie sich die Funktion

$$f(x) = x^2 \tag{27}$$

ändert, wenn man x von einem Ausgangspunkt x_0 auf $x_0 + h$ ändert.

[Abb. xx: Skizze zu Ableitung, Punkte N, M]

Die Fragestellung ist in Abb. xx grafisch illustriert. Aus der Abbildung sieht man, daß die gesuchte Änderung durch

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \frac{2x_0h+h^2}{h} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{28}$$

gegeben ist. Gl. 28 ist die Steigung der Sekante durch die Punkte N und M (s. Abbildung). Die Größe $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ bezeichnet man als *Differenzenquotienten*, Δx ist die Änderung entlang der x-Achse, also in unserem Fall h. Aus Abb. xx und Gl. 28 sieht man, daß der Differenzenquotient vom Referenzpunkt x_0 sowie vom Zielpunkt $x_0 + h$ bzw. der Größe des Abstands h abhängt. Insbesondere die zweite Abhängigkeit limitiert die Nützlichkeit von Gl. 28. Es wäre wünschenswert einen Ausdruck zu finden, der angibt in welchem Ausmaß (um das bewußt nichtmathematisch auszudrücken) sich $f(x)$ in einem interessierenden Punkt x_0 ändert. Zwangsläufig muß man sich also auf die Umgebung des Punkts x_0 konzentrieren, d.h. das Verhalten von Gl. 28 wenn h klein wird untersuchen. Man kann Gl. 28 vereinfachen, indem man durch h kürzt, d.h.,

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{2x_0 h + h^2}{h} = 2x_0 + h \tag{29}$$

Nachdem h aus dem Nenner verschwunden ist, kann man jetzt h problemlos gleich Null setzen, und erhält so einen Ausdruck für die Änderung

$$\frac{\Delta F}{\Delta x}(x_0,\, h = 0) = 2x_0 \qquad \textbf{problematisch!!} \tag{30}$$

Achtung: Es wird sich zwar herausstellen, daß das Ergebnis in Gl. 30 richtig ist, aber um dahinzugelangen haben wir (zumindestens) zwei "mathematische Todsünden" begangen: Die Vereinfachung in Gl. 29 ist nur für $h \neq 0$ zulässig. D.h., wenn ich (29) mache, dann darf ich nicht unmittelbar danach sagen $h = 0$. Weiters, in Gl. 28 und auch 29 hat das Δx ja eine ganz konkrete Bedeutung, nämlich die Änderung des Arguments. In Gl. 30 steht aber auf der linken Seite im Nenner $\Delta x = h = 0$, und somit eine Division durch Null.

Wir müssen Gl. 30 also mit großer Skepsis betrachten und etwas vorsichtiger vorgehen. Gln. 28 und 29 kann man unter der Voraussetzung $h \neq 0$ folgendermaßen zusammenfassen:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 2x_0 + h \tag{31}$$

Als nächstes machen wir h klein — wir schreiben dafür $h \to 0$, hüten uns aber davor $h = 0$ zu setzen. Es ergibt sich eine etwas paradoxe Situtation. Vom Ausdruck links (mit $\Delta x = h$ im Nenner) müssen wir befürchten, daß sie um so größer werden, je kleiner h wird.* Die rechte Seite hingegen nähert sich immer mehr an $2x_0$ an je kleiner h wird.† Während unsere Befürchtung für die linke Seite vage war, ist die Überlegung für die rechte Seite wohldefiniert. Es gilt ganz offensichtlich (und Sie können das jederzeit mit dem Taschenrechner testen)

$$2x_0 + h \to 2x_0 \qquad \text{wenn} \qquad h \to 0.$$

Was wir uns eben überlegt haben, bezeichnet man als Berechnen des Grenzwerts, die Standardnotation ist

$$\lim_{h\to 0}\,[2x_0 + h] = 2x_0.$$

In Grenzwertschreibweise können wir jetzt Gl. 31 für $h \to 0$ wie folgt schreiben

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\,[2x_0 + h] = 2x_0 = \frac{df}{dx} = f' \tag{32}$$

*Probieren Sie's: $1/0.1 = 10$, $1/0.01 = 100$, $1/10^{-9} = 1000000000$ usw.

†Sei $x_0 = 1$ und somit $2x_0 = 2$, dann erhält man für $h = 0.1$ 2.1, für $h = 0.01$ 2.01, für $h = 0.001 = 2.001$ usw. Für $h = 0.001$ ist der relative Fehler der durch Vernachlässigen von h entstehen würde bereits kleiner als 0.05%.

Gl. 32 ist die korrekte Schreibweise für unseren ersten Versuch, Gl. 30. Es ist nicht selbstverständlich, daß der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = f'$$

existiert. Ist dies jedoch der Fall, dann bezeichnet man $\frac{df}{dx} = f'$ als *Ableitung* der Funktion $f(x)$, den Vorgang des Ableitens (Gl. 32) bezeichnet man auch als *Differenzieren.* Der Grenzwert $\frac{df}{dx}$ wird als *Differentialquotient* bezeichnet.[‡] *Um das richtig zu betonen: Wir haben eben (Gln. 28, 31 und 32) die Funktion $f(x) = x^2$ ohne Vorwissen und ohne Formelsammlung differenziert.* Wohlgemerkt, eigentlich haben wir die Ableitung für einen bestimmten Punkt berechnet, der Grenzwert Gl. 32 muß im Prinzip für jeden Punkt x_0 gesondert berechnet werden. Da jedoch in unseren Umformungen nichts vorkam, was auf manche x-Werte zutreffen und auf andere nicht zutreffen würde, gilt Gl. 32 für beliebige $x_0 \in \mathbb{R}$. Man sagt die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ ist durch

$$f'(x) = \left(x^2\right)' = \frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

gegeben.

Zum Abschluß dieser Einleitung interpretieren wir unsere Rechenschritte noch geometrisch. Wie oben schon angemerkt, ist Gl. 28 (der Differenzenquotient) die Steigung der Sekante durch die Punkte $N = (x_0, f(x_0))$ und $M = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ (s. Abb. xx). Um zur Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0 zu kommen, haben wir $h \to 0$ gegen Null gehen lassen. Geometrisch entspricht dies aber einem Verschieben von M in Richtung N. Dies entspricht aber genau der Definition der *Tangente* an eine beliebige Kurve in einem Punkt x_0. *Die Ableitung $f'(x_0)$ ist daher die Steigung der Tangente an die Funktion im Punkt x_0.* Historisch war die Berechnung dieser Steigung einer der motivierenden Faktoren zur Entwicklung der Differentialrechnung.

Soweit ein Vorgeschmack auf's Differenzieren. Obwohl wir unseren ersten problematischen Versuch (Gl. 30) später korrigiert haben, müssen wir uns doch ein wenig Überlegen, unter welchen Umständen die Ableitung existiert. Dies wiederum bedingt, daß wir uns ein wenig mit der Berechnung von Grenzwerten auseinandersetzen.

4.2 Berechnung von Grenzwerten

Wir sind in unserem "ersten Anlauf" zum Differenzieren ganz zentral auf das Konzept des Grenzwerts gestoßen. Die Frage nach Grenzwerten taucht in den Naturwissenschaften immer dann auf, wenn es darum geht das Verhalten einer Funktion in der Nähe eines "problematischen Punkts" zu untersuchen, und ist nicht auf das Differenzieren beschränkt. Wir begnügen uns mit folgender qualitativer Definition des Grenzwerts. (Interessierte seien auf die AHS Bücher verwiesen, die sich in großem mathematischen Detail mit Grenzwerten beschäftigen)

Man schreibt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{33}$$

[‡] Diese auf Leibniz zurückgehende Schreibweise wird in der AHS selten verwendet, wir werden sie aber später benötigen. Sie sollten daher mit beiden Schreibweisen, df/dx und $f'(x)$ für die Ableitung(sfunktion) vertraut sein.

und sagt "Die Funktion $f(x)$ besitzt an der Stelle a den Grenzwert L" *wenn* man die Werte von $f(x)$ beliebig nahe an L annähern kann, indem man x beliebig nahe an a herankommen läßt. Wir setzen vorraus, daß $f(x)$ in der Nähe von a definiert ist, jedoch nicht unbedingt bei a. Im Gegenteil, die Funktion braucht an der Stelle $x = a$ gar nicht definiert zu sein. In der Praxis ist es meistens der Nachsatz zur Definition (33), der Grenzwerte so interessant macht, denn man lernt damit etwas über das Verhalten von Funktionen in der Nähe von Punkten außerhalb des Definitionsbereichs der Funktion. Genau diese Eigenschaft haben wir auch schon beim Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten (zur Ableitung) ausgenutzt.

Wir wollen im folgenden kurz die wichtigsten Regeln zum Berechnen von Grenzwerten angeben und durch Beispiele illustrieren, dadurch wird hoffentlich auch die Aussage von Gl. 33 illustriert.

1. Der Grenzwert einer konstanten Größe c ist diese Größe selbst.
$$\lim_{x\to a} c = c$$
2. $$\lim_{x\to a} x = a$$
3. Der Grenzwert einer Summe (Differenz) endlich vieler Funktionen ist die Summe (Differenz) der entsprechenden Einzelgrenzwerte, vorausgesetzt, daß diese existieren.
$$\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$
4. Der Grenzwert eines Produkts endlich vieler Funktionen ist das Produkt der entsprechenden Einzelgrenzwerte, vorausgesetzt, daß diese existieren.
$$\lim_{x\to a} [f(x)\ g(x)\ h(x)] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right] \left[\lim_{x\to a} g(x)\right] \left[\lim_{x\to a} h(x)\right]$$
5. Der Grenzwert des Quotienten zweier Funktionen ist gleich dem Quotienten der Grenzwerte dieser Funktionen, wenn die Einzelgrenzwerte existieren, und der Grenzwert des Nenners $\neq 0$ ist.
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$
6. Für Wurzeln gilt weiters
$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$
wobei wir für gerade n voraussetzen, daß der Grenzwert $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$
7. Wenn die Werte einer Funktion $f(x)$ zwischen den Werten zweier anderer Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ eingeschlossen sind, wenn also $g(x) < f(x) < h(x)$ ist, und wenn $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ gilt, dann ist auch $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

In der Praxis findet man Grenzwerte durch Kombination dieser sieben Regeln, wobei manchmal allerdings "kreatives Umformen" von Nöten ist. Beispiele:

$$\lim_{x\to 5}(2x^2-3x+4)=\lim_{x\to 5}(2x^2)-\lim_{x\to 5}(3x)+\lim_{x\to 5}4=(\lim_{x\to 5}2\cdot\lim_{x\to 5}x^2)-(\lim_{x\to 5}3\cdot\lim_{x\to x}x)+4=$$

$$2\cdot(\lim_{x\to 5}x\cdot\lim_{x\to 5}x)-3\cdot 5+4=2\cdot 5^2-3\cdot 5+4=39.$$

Im nächsten Beispiel starten wir mit Regel 5, wobei sich die Zuläßigkeit dieses Schritts erst am Ende herausstellt. Es werden nur die wichtigsten Schritte gezeigt:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}=\frac{\lim_{x\to -2}(x^3+2x^2-1)}{\lim_{x\to -2}(5-3x)}=$$

$$\frac{(-2)^3+2\,(-2)^2-1}{\underbrace{5-3\,(-2)}_{\neq 0}}=-\frac{1}{11}$$

Den Grenzwert

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-1}{x-1}=$$

findet man, indem man den Nenner $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ faktorisiert und durch $x-1$ kürzt.

$$=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

Achtung: Obwohl wir uns an $x\to 1$ annähern, gilt doch in allen Schritten $x\neq 1$, daher dürfen wir kürzen!

Und noch ein letztes Beispiel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$$

Der "Trick" besteht hier darin, die passende Erweiterung zu finden, sodaß man nach der Umformung das problematische x wegkürzen kann.

Neben Grenzwerten der Form $x\to a$ treten in Anwendungen auch oft Grenzwerte der Form

$$\lim_{x\to\infty}f(x)$$

auf (natürlich auch $x\to-\infty$). Es sei der Definitionsbereich D einer Funktion $f(x)$ unbeschränkt nach oben (bzw. unten).* Die Zahl

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=L$$

wird Grenzwert von $f(x)$ für $x\to\infty$ genannt, wenn sich nach Vorgabe einer positiven Zahl ϵ eine Zahl $N>0$ angeben läßt, sodaß für alle $x>N$ die zugehörigen Funktionswerte $f(x)$ im

*Also, z.B. $D=\mathbb{R}$ oder $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>0\}$.

Intervall $L - \epsilon \leq L \leq L + \epsilon$ liegen. Eine analoge Definition gilt für den Grenzwert $x \to -\infty$. Man fragt sich also, ob die Funktion für $x \to \infty$ ($x \to -\infty$) gegen einen bestimmten Wert strebt. Beispiele:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 1 + 0 = 1.$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Wächst hingegen die Funktion über alle Grenzen, so bezeichnet man den Grenzwert selbst als $+\infty$ bzw. $-\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

Häufig verwendet man die Schreibweise

$$\lim_{x\to a} |\, f(x)\, | = \infty$$

für den Fall, daß bei Annäherung von x an die Stelle a die Funktion $f(x)$ betragsmäßig über alle Grenzen wächst, z.B.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \text{(A)}$$

Aber Achtung: $\pm\infty$ ist keine Zahl, und im Sinne von Gl. 33 (bzw. den streng mathematischen Definitionen des Grenzwerts) existiert der Grenzwert von $1/x^2$ für $x \to 0$ nicht! Die in (A) gezeigte Schreibweise ist eine *Abkürzung* zur Verdeutlichung des Verhaltens der Funktion für z.B. $x \to 0$.

Eine letzte Anmerkung: Treten beim Versuch einen Grenzwert zu bestimmen, unbestimmte Ausdrücke der Form

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0 \cdot \infty \qquad \text{usw.}$$

auf, dann kann die l'Hopitalsche Regel bzw. die Verwendung von Potenzreihendarstellungen) helfen (s. Abschnitt über Taylorreihen)

4.3 Stetigkeit

Mit dem Begriff des Grenzwerts können wir jetzt ganz einfach den Begriff der *Stetigkeit* einführen. Stetigkeit wiederum ist die wichtigste Voraussetzung für Differenzierbarkeit (wenngleich es Funktionen gibt, die an einer (oder mehreren) Stelle(n) stetig, aber nicht differenzierbar sind). *Eine Funktion ist an der Stelle a stetig, wenn*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{34}$$

Diese Definition verlangt implizit drei Dinge:

1. $f(a)$ ist definiert, d.h. $a \in D$ von $f(x)$.
2. Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert und

3. dieser Grenzwert ist tatsächlich gleich $f(a)$.

Die Funktion $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$ ist an der Stelle $x_0 = 2$ unstetig, da sie dort nicht definiert ist.* Eine Variante dieses Beispiels ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, und der Grenzwert $\lim_{x\to 2} f(x) = -1$ existiert. Da allerdings

$$\lim_{x\to 2} f(x) = -1 \neq f(2) = 1$$

ist die Funktion bei $x_0 = 2$ ebenfalls unstetig. Für

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

wiederum existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$ nicht (und somit ist Vorraussetzung 2 nicht erfüllt), die Funktion ist daher bei $x_0 = 0$ unstetig.

Qualitativ läßt sich Definition (34) auch so formulieren, daß der Graph einer stetige Funktion eine glatte Kurve ist. Dies ist in allen drei obigen Beispielen nicht der Fall. Schließlich seien noch Funktionen mit endlichen Sprungstellen erwähnt, z.B.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

auf. Auch hier existiert der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to 0$ nicht (obwohl die Funktion dort definiert ist!), und die Funktion ist daher bei $x_0 = 0$ unstetig.†

4.4 Berechnung der Ableitung — zweiter Anlauf

4.4.1 Definition

Ausgerüstet mit unseren neugewonnenen Kenntnissen über Grenzwert und Stetigkeit wiederholen wir jetzt die Definition der Differenzierbarkeit: *Eine Funktion $y = f(x)$ ist an einem Punkt differenzierbar, wenn folgender Grenzwert existiert.*

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{35}$$

Es handelt sich hierbei um eine neue Funktion von x, die mit den Symbolen y', $\dot{y}$, $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$ gekennzeichnet wird. Die geometrische Interpretation der Ableitung im Punkt x_0 ist die Steigung der Tangente an die Kurve $f(x)$ in diesem Punkt.

*In diesem Fall kann man an der Stelle $x_0 = 2$ eine sogenannte *stetige Fortsetzung* der Funktion, nämlich $g(x) = x + 1$ angeben, aber das ist nicht die ursprüngliche Funktion! Man spricht auch von hebbaren Unstetigkeiten.

†Die Funktion ist rechtsseitig stetig, aber derartige Feinheiten führen zu weit.

Stetigkeit ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für Differenzierbarkeit. Dies wird am besten durch die Betragsfunktion illustriert

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

die in Abb. xx dargestellt ist. Diese Funktion ist überall stetig,

[Abb. xx: Betragsfunktion]

aber an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. Ohne dies formal zu untersuchen, sieht man dies daran, daß an der Stelle $x_0 = 0$ nicht in eindeutiger Weise eine Tangente an die Funktion gelegt werden kann.

In Abschnitt 4.1 haben wir Definition (35) bereits benutzt, um die Funktion $f(x) = x^2$ abzuleiten. Ein weiteres Beispiel hierzu: Was ist die Ableitung von $f(x) = 1/x$ (der Punkt $x = 0$ natürlich ausgenommen). Wir haben

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}$$

Somit ist

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x\,(x + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x\,(x + \Delta x)}$$

Die Ableitung erhält man jetzt gemäß Gl. 35, d.h.

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{-\Delta x}{x\,(x + \Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x\,(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

(Nochmals zur Erinnerung: Die Division durch Δx ist zulässig, weil wir zwar Δx beliebig klein werden lassen, ohne jedoch $\Delta x = 0$ zuzulassen!)

Im Prinzip kann man mit Hilfe von (35) die Ableitung beliebiger Funktionen finden. Mit zunehmender Komplexität von $f(x)$ wird dies jedoch (rasch) "beliebig schwierig". Nach einem kurzen Einschub stellen wir daher in Abschnitt 4.4.3 einen Satz von Rechenregeln vor, mit deren Hilfe die Ableitungsfunktion beliebiger Funktionen gebildet werden kann.

4.4.2 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Mathematikbücher sind voll von wichtigen Sätzen zu Stetigkeit und Differenzierbarkeit bzw. Eigenschaften die daraus folgen. (AHS Lehrbücher stellen eine erstaunliche Fundgrube dar.) Wir wollen hier nur einen einzige derartige Gesätzmäßigkeit vorstellen, den *Mittelwertsatz (MWS) der Differentialrechnung.** *Wenn eine Funktion* $y = f(x)$ *in einem abgeschlossenen Intervall* $[a, b]$ *stetig und im Inneren dieses Intervalls,* $]a, b[$, *differenzierbar ist, dann existiert zwischen* a *und* b wenigstens *eine Zahl* c *derart, daß gilt*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \qquad (a < c < b) \tag{36}$$

*Der MWS der Integralrechnung folgt bei gegebenem Anlaß.

Wir verzichten auf den Beweis und betrachten Abb. yy zwecks geometrischer Interpretation (daraus wird der Satz auch sofort plausibel).

[Abb. yy: Abbildung fuer MWS]

Jede Kurve, die zwischen zwei Punkten A und B stetig ist, und an die in jedem dazwischenliegenden Punkt in eindeutiger Weise die Tangente gelegt werden kann, verfügt zwischen A und B über mindestens einen Punkt, in dem die Tangente parallel zur Sekante durch A und B ist. Es kann durchaus mehrere solche Punkte geben! Um zu sehen, daß Stetigkeit und Differenzierbarkeit notwendig sind, skizzieren Sie sich die Betragsfunktion $y = |x|$. Satz (36) kann augenscheinlich für kein Intervall, das den nichtdifferenzierbaren Punkt $x = 0$ überspannt, erfüllt werden.

4.4.3 Ableitungen ausgewählter Funktionen und Rechenregeln

Hier jetzt die versprochenen Rechenregeln zum Ermitteln der Ableitung. Diese sollten von der Mittelschule bekannt sein. Die meisten AHS Lehrbücher enthalten die entsprechenden Details und eine Vielzahl von Übungsbeispielen. Um dieses Kapitel nicht unnötig in die Länge zu ziehen, wird auf Beweise verzichtet.

Wir setzen folgende Ableitungen elementarer Funktionen voraus (die entsprechende Tabelle in Ihrer Formelsammlung sollten Sie mehr oder weniger auswendig beherrschen!)

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
c (Konstante)	0
x	1
x^a $(a \in \mathbb{R})$	$a\,x^{a-1}$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Die ersten drei Einträge lassen sich aus der Definition der Ableitung, Gl. 35 gewinnen. Beachten Sie, daß die Regel für die Potenzfunktion (dritte Zeile) die Fälle $\sqrt[b]{x}$ und $1/x^c$ abdeckt. Daß die Ableitung der Exponentialfunktion e^x die Exponentialfunktion selbst ist (vierte Zeile), setzen wir voraus.* Die Ableitungen von Sinus und Cosinus folgen mit Hilfe von Gln. 16 und 17 aus der Ableitung der Exponentialfunktion (bitte rechnen Sie das nach — lassen Sie sich von $i = sqrt{-1}$ nicht stören!)

Ableiten ist Berechnen von Grenzwerten, dementsprechend folgen einige Rechenregeln für Ableitungen unmittelbar aus den Rechenregeln für Grenzwerte (S. 25). Insbesondere gilt

$$\frac{d}{dx}\left(af(x)\right) = a\frac{df(x)}{dx} \tag{37}$$

Beispiel:

$$(5x^2)' = 5\,(x^2)' = 5\,2x = 10x$$

*Man kann diese Eigenschaft auch verwenden, um die Exponentialfunktion einzuführen, d.h. die Funktion, für die gilt $f(x) = f'(x)$, bezeichnet man mit e^x.

sowie

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)+g(x)\right)=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx} \tag{38}$$

Beispiel:

$$(x^2+\sqrt{x})'=(x^2)'+(\sqrt{x})'=2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Die beiden wichtigsten Differentiationsregeln sind jedoch die Produkt- und die Kettenregel. Für Produkte von Funktionen gilt

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\,g(x)\right)=\frac{df(x)}{dx}\,g(x)+f(x)\,\frac{dg(x)}{dx}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \tag{39}$$

Beispiele:

$$(x^2\,e^x)'=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'=2xe^x+x^2e^x=e^x(x^2+2x)$$
$$(x\cos x)'=(x)'\cos x+x(\cos x)'=\cos x-x\sin x.$$

Häufig hat man mit sogenannten verketteten Funktionen zu tun. Wenn man z.B. die Funktion

$$f(x)=\sin(x^2)$$

betrachtet, so wird die Sinusfunktion auf eine weitere Funktion $u(x)=x^2$ angewandt. Dies ist gemeint, wenn wir $f(x)=f(u(x))=f(u)$ schreiben, u versteht sich als beliebige Funktion von x (die selbst wieder verkettet sein kann!) Für die Ableitung gilt die sogenannte *Kettenregel*

$$\frac{d}{dx}\left(f(u)\right)=\frac{df(u)}{du}\,\frac{du}{dx} \tag{40}$$

Den zweiten Term (du/dx) bezeichnet man auch als innere Ableitung.

Beispiele: Mit $u=x^2$ gilt

$$(\sin(x^2))'=\frac{d\sin u}{du}\,\frac{du}{dx}=-\cos u\frac{dx^2}{dx}=-\cos(x^2)\,2x=-2x\cos(x^2)$$

Die innere Funktion u kann wie gesagt selbst wieder verkettet sein. Es sei z.B. die Ableitung von $f(x)=\exp(\sqrt{1-x^3}$ gesucht. In diesem Fall ist $u=\sqrt{1-x^3}$ selbst wieder eine verkettete Funktion, und zwar $u=\sqrt{v}$ mit $v=1-x^3$. Wir müssen also die Kettenregel zweimal anwenden. Gehen wir ganz langsam vor:

$$\frac{d}{dx}\exp\left(\sqrt{1-x^3}\right)=\frac{d}{du}\exp(u)\frac{du}{dx}=\exp(u)\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^3}\right]=\exp\left(\sqrt{1-x^3}\right)\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^3}\right]$$

Als nächstes leiten wir $u=\sqrt{1-x^3}=\sqrt{v}$ ab.

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^3}=\frac{d}{dv}\sqrt{v}\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{v}}\frac{d}{dx}(1-x^3)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}(-3x^2)$$

Somit haben wir alle Puzzlesteine und können das Endergebnis anschreiben:

$$\frac{d}{dx}\exp(\sqrt{1-x^3}=\exp\left(\sqrt{1-x^3}\right)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}(-3x^2)=-\frac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}\exp\left(\sqrt{1-x^3}\right)$$

Mit entsprechender Übung kann man derartige Rechnungen natürlich in einem Schritt machen, aber im Zweifelsfall ist das schrittweise Vorgehen am sichersten.

Bitte vergessen Sie gerade in einfachen Fällen *nicht* auf die innere Ableitung

$$(\sqrt{1-2x})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-2x}}(-2) = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}},$$

-2 kommt von der Ableitung $d(1-2x)/dx$.

Vermutlich haben Sie in der Schule auch noch die Quotientenregel gelernt:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \tag{41}$$

Diese Regel ist aber nur die Anwendung von Produkt und Kettenregel, denn

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\,(g(x))^{-1}\right)' = f'(x)\,(g(x))^{-1} + f(x)\,\left((g(x))^{-1}\right)' =$$

$$\frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\underbrace{(-1)(g(x))^{-2}g'(x)}_{\text{Kettenregel}} = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Wenn Sie jetzt die beiden Terme auf gemeinsamen Nenner bringen, erhalten Sie die rechte Seite von Gl. 41. Die klassische Anwendung der Quotientenregel ist die Ableitung des Tangens und des Cotangens. Wir leiten den Tangens ab, der Cotangens bleibt als Übungsaufgabe für Sie.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Sie sollten zur Übung die Ableitung des Tangens auch gemäß $\tan x = \sin x(\cos x)^{-1}$ ohne Quotientenregel finden.

An dieser Stelle vielleicht die wichtigste "Regel" überhaupt: *Denken Sie nach bevor Sie ableiten.* Läßt sich die Funktion vereinfachen? Welche Regel ist angebracht und am effizientesten? Z.B., stellt $\sqrt[3]{(x+2)^4} = (x+2)^{4/3}$ zwar keine Vereinfachung dar, dennoch ist es die beste Schreibweise zum Ableiten. Natürlich "dürfen" Sie $1/(x-3)^2$ mit der Quotientenregel differenzieren. Nur, für eine Ableitung einer Potenz $1/(x-3)^2 = (x-3)^{-2}$ schießen Sie mit einer Kanone auf Spatzen, und Sie handeln sich bloß eine zusätzliche Fehlerquelle ein!

Mit dem bis jetzt Gelernten (Ableitungen elementarer Funktionen, Rechenregeln) können wir die Ableitungsfunktion von einer Vielzahl von Funktionen von im Prinzip beliebiger Kompliziertheit berechnen. Die große Ausnahme ist die Ableitung des Logarithmus,

$$\frac{d}{dx}\ln x = (\ln x)' = ?$$

Mit ein bißchen Überlegen sieht man, daß dieser "weiße" Fleck nur eine Manifestation eines allgemeineren Problems ist, nämlich der Frage, wie man die Ableitung einer Umkehrfunktion ($\ln x$, $\arcsin x$ usw.) berechnet. Aus der Mittelschule ist Ihnen sicher bekannt, daß

$$\frac{d}{dx}\ln x = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \tag{42}$$

Diese Regel, sowie die Ableitungen der Winkelfunktionen

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1,$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

finden Sie in Ihrer Formelsammlung, z.B. [Bartsch S. 135].

Die obigen Regeln kann man mit Hilfe der Kettenregel unter Ausnützung der Grundeigenschaft der Umkehrfunktion, $f^{-1}(f(x)) = x$ (vgl. S. 21) gewinnen; die größte Schwierigkeit ist in der Praxis meist das Festlegen der korrekten Definitionsbereiche des Funktionspaars f und f^{-1}. Im folgenden verwenden wir

$$y = f(x)$$

sowie

$$g(y) = f^{-1}(y) = x.$$

Um sich im "Variablengewirr" nicht zu verlieren, erweist es sich als vorteilhaft, die Leibnizsche Schreibweise zu verwenden, selbst wenn diese für viele von Ihnen ungewohnt ist. Wir suchen

$$\frac{d}{dy} g(y) = g'(y) = \frac{d}{dy} f^{-1}(y).$$

Erinnern Sie sich, daß die Bezeichnung der Variablen einer Funktion Schall und Rauch ist. Sobald wir wissen, wie wir $dg(y)/dy = d(f^{-1}(y))/dy$ zu berechnen haben, kennen wir auch $dg(x)/dx$, $dg(t)/dt$, $dg(\text{hansi})/d(\text{hansi})$ usw. Andererseits ist y nicht ohne Absicht gewählt, denn jedes Argument einer Umkehrfunktion $g(y) = f^{-1}(y)$ kann ja auch als Funktionswert der entsprechenden Funktion $y = f(x)$ aufgefaßt werden. In diesem Sinn suchen wir

$$\frac{dg(y)}{dx}$$

Dies läßt sich einerseits zu

$$\frac{dg(y)}{dx} = \frac{g(f(x))}{dx} = \frac{d(\overbrace{f^{-1}(f(x))}^{x})}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1 \qquad \text{(I)}$$

vereinfachen, andererseits gilt aber nach der Kettenregel

$$\frac{dg(y)}{dx} = \frac{dg(y)}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dg(y)}{dy}\frac{df(x)}{dx}. \qquad \text{(II)}$$

Gleichsetzen von (I) und (II) ergibt

$$\frac{dg(y)}{dy}\frac{df(x)}{dx} = 1$$

$$\frac{dg(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}} = \frac{1}{\frac{d(f(g(y)))}{dx}} \tag{43}$$

Die letzte Identität folgt aus $x = g(y) = f^{-1}(y)$; in der Praxis heißt das, daß man den Nenner $dy/dx = df(x)/dx$ nach y auflösen (also in Termen von $y = f(x)$ ausdrücken) muß.

In der Praxis ist es meist einfacher die Schritte, die zu Gl. 43 führen, für das spezielle Funktionspaar (f und f^{-1}) durchzuführen. Wir illustrieren dies an zwei Beispielen:

Um $d(\ln y)/dy$ zu finden, berechnen wir ($x = \ln y$, $y = e^x$)

$$\frac{d\ln(e^x)}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1 = \frac{d\ln y}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \frac{d\ln y}{dy}\frac{de^x}{dx} = \frac{d\ln y}{dy}e^x$$

Somit ist

$$\frac{d\ln y}{dy} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y},$$

und Gl. 42 ist bewiesen.

Ganz analog geht man bei der Suche von $d(\arcsin y)/dy$ vor. Man berechnet ($x = \arcsin y$, $y = \sin x$)

$$\frac{d\arcsin(\sin x)}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1 = \frac{d\arcsin y}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \frac{d\arcsin y}{dy}\frac{d\sin x}{dx} = \frac{d\arcsin y}{dy}\cos x$$

Somit ist

$$\frac{d\arcsin y}{dy} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Aus dem Funktions- / Umkehrfunktionspaar e^x / $\ln x$ und der Eigenschaft der Exponentialfunktion identisch mit ihrer Ableitungsfunktion zu sein, d.h.,

$$(e^x)' = e^x$$

kann man einerseits weitere Ableitungsregeln gewinnen, bzw. auch schon bekannte Regeln auf anderem Weg ableiten. Die Schlüsselbeziehung ist die Identität

$$e^{\ln x} = \ln(e^x) = x \qquad (*)$$

Wir suchen zunächst die Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ für beliebiges $a \in \mathbf{R}$. Setzt man $a = e^{\ln a}$, so findet man

$$(a^x)' = ((e^{\ln a})^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}\,\ln a = \ln a\, a^x \tag{44}$$

Der Trick besteht also a^x mittels (*) auf die Exponentialfunktion zurückzuführen, dessen Ableitung wohlbekannt ist. Ebenfalls mit Hilfe von (*) kann man auch Funktionen der Form x^x, $x > 0$ ableiten. Es gilt

$$(x^x)' = ((e^{\ln x})^x)' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}\,\underbrace{(x\ln x)'}_{\#} = e^{x\ln x}\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x(1+\ln x),$$

\# ist die innere Ableitung.

Zu guter letzt können wir mittels (*) auch noch

$$(x^a)' = a\,x^{a-1}$$

beweisen.[†] Es gilt nämlich

$$(x^a)' = ((e^{\ln x})^a)' = (e^{a\ln x})' = e^{a\ln x}\,(a\ln x)' = x^a\frac{a}{x} = a\,x^{a-1}.$$

[†]Diese Beziehung scheint bereits in unserer Minitabelle der elementaren Ableitungen (S. 30) auf. Der Beweis ohne Zuhilfenahme der Exponentialfunktion wäre für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ alles andere als trivial.

4.4.4 Höhere Ableitungen

Erfüllt eine Ableitungsfunktion $f'(x)$ die Voraussetzungen für Differenzierbarkeit, so kann $f'(x)$ wieder differenziert werden. Man schreibt

$$\frac{d}{dx}\frac{df}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2} = (f'(x))' = f''(x)$$

Dieser Vorgang kann im Prinzip beliebig oft wiederholt werden, man schreibt für die n-te Ableitung*

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Der Definitionsbereich einer Ableitung (der $n+1$-ten Ableitung) kann von dem der Funktion (der n-ten Ableitung) verschieden sein. Beispiel: $f(x) = x^{1/3}$ hat $D = \mathbb{R}$, hingegen gilt für $f'(x) = 1/3\, x^{-2/3}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ist $f(x)$ ein Polynom n-ten Grades, so sind nur die ersten n Ableitungen von Null verschieden. Zum Beispiel für

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$$

$(n = 3)$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 8x \\ f''(x) &= 6x - 8 \\ f'''(x) &= 6 \\ f^{(4)}(x) &= 0 = f^{(5)}(x) = \ldots \end{aligned}$$

Viele Funktionen, u.a. die Exponentialfunktion und die Winkelfunktionen, haben unendlich viele von Null verschiedene Ableitungen, insbesondere gilt für die Exponentialfunktion

$$f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = \ldots = e^x.$$

Zum Abschluß eine Anmerkung zur Praxis: Mit den im vorigen Abschnitt vorgestellten Regeln kann die Ableitungsfunktion jeder (differenzierbaren) Funktion gefunden werden. Nichtsdestotrotz nimmt der praktische Rechenaufwand für höhere Ableitungen in der Regel zu (so entsteht z.B. durch die innere Ableitung bei der Anwendung der Kettenregel auf $f(g(x))$ das Produkt $f'(g(x))\, g'(x)$, d.h., bei der nächsten Ableitung ist zuerst die Produktregel und dann die Kettenregel auf jeden Teilausdruck anzuwenden). Es ist daher wichtig, die nach einer Ableitung entstehenden Ausdrücke so weit als möglich zu vereinfachen (wobei das “Leitmotiv” des Vereinfachens immer die Vorbereitung auf eine allfällige weitere Ableitung ist) — zum Differenzieren gehört die Vereinfachung des Ergebnis dazu!

4.5 Anwendung: Kurvendiskussion

In der Einleitung zu diesem Abschnitt wurde schon auf die vielfältigen Anwendungen der Differentialrechnung in den Naturwissenschaften hingewiesen. Die “Mittelschulanwendung” der Differentialrechnung ist die *Kurvendiskussion*. Wir verstehen darunter die Bestimmung von

*Manchmal verwendet man die Notation $f^{(0)}(x)$, also die “nullte” Ableitung, um die Funktion selbst zu bezeichnen ($f^{(0)}(x) = f(x)$).

1. Definitionsbereich
2. Nullstellen
3. Extremstellen und
4. Wendepunkten

einer Funktion $y = f(x)$. Von Interesse ist weiterhin das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$ und ggf. (z.B. bei rationalen Funktionen (Brüchen)) in der Nähe von Polen (Lücken im Definitionsbereich, z.B. Nullstellen des Nenners bei rationalen Funktionen), sowie die Frage, ob es sich um globale oder lokale Extrema handelt. Die Kurvendiskussion mag Ihnen im Zeitalter des Computers, mit dem Sie beliebige Funktionen auf Knopfdruck (Mausklick) graphisch darstellen können, anachronistisch vorkommen. Andererseits zeigt Ihnen der schönste Graph einer Funktion nicht, wo *genau* sich z.B. Extrem- und Wendepunkte befinden (Test: Wo sind Extrem- und Wendepunkte von $f(x) = e^{-x}\sin x,\ x > 0$?). Kurvendiskussion und Computer ergänzen sich daher. In den Naturwissenschaften wiederum sind Extrempunkte und Wendepunkte diejenigen Punkte eines funktionalen Zusammenhangs zwischen physikalischen Größen, an denen sich der Charakter dieses Zusammenhangs, der Funktion, ändert. Die scheinbar "akademische" Kurvendiskussion wird zum Werkzeug, um das physikalische, biologische, chemische usw. Problem besser zu verstehen. Wir begnügen uns hier zu Illustrationszwecken mit einem einfachen Beispiel, an dem wir die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten beschreiben. *Sie sollten jedoch Kurvendiskussionen von Polynomen, rationalen Funktionen, sowie Funktionen, die Exponentialfunktion, Logarithmus und/oder Winkelfunktionen enthalten, durchführen können. Bitte konsultieren Sie Ihre Mittelschullehrbücher.*[*]

Im Sinne des eben Gesagten wollen wir das Verhalten der Funktion

$$f(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x \qquad \text{(A)}$$

studieren. Eine Abbildung finden Sie in Fig. 8

(1) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$. Weiters (optional) kann man sich leicht überlegen, daß die Funktion, die ein Polynom dritten Grads ist, für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ und für $x \to \infty$ gegen $+\infty$ strebt.

(2) Die Nullstellen findet man durch Lösen von

$$f(x) = x(x-1)(x-2) = 0. \qquad \text{(B)}$$

Da die Funktion in faktorisierter Form gegeben ist, kann man aus (B) unmittelbar Ablesen, daß die Funktion bei $x_{0,1} = 0$, $x_{0,2} = 1$ und $x_{0,2} = 2$ verschwindet. $f(x)$ hat also die drei Nullstellen

$$\mathrm{N}_1 = (0|0) \qquad \mathrm{N}_2 = (1|0) \qquad \mathrm{N}_3 = (2|0)$$

(3) Wo hat eine Funktion ein Maximum oder ein Minimum? Die allgemeine Antwort darauf wurde bereits auf S. 20 gegeben, und man kann sich z.B. leicht überlegen, daß die Betragsfunktion $|x|$ in $(0|0)$ ein globales Minimum hat (vgl. 29). Im folgenden wollen wir uns jedoch auf

[*]In der Praxis erweist sich die Suche nach den Nullstellen, also das Lösen der auftretenden Gleichungen $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ als das größte Problem. Auch hier können wir nur auf die Mittelschule bzw. die Mittelschullehrbücher verweisen!!

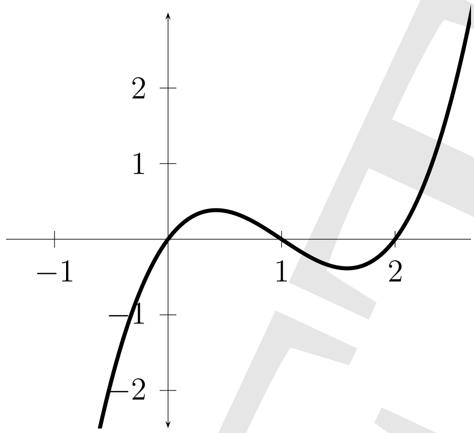


Abbildung 8: $f(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$

differenzierbare Funktionen beschränken. In diesem Fall gilt folgende notwendige Bedingung, um Punkte zu finden, an denen eine Funktion ein Maximum bzw. ein Minimum hat:

$$f'(x) = 0 \qquad \text{(C)}$$

Wenn man sich an die geometrische Interpretation der Ableitung erinnert, so ist die Aussage von (C) offensichtlich. Die Tangente einer stetigen und differenzierbaren Funktion muß in Punkten, die auf einem Intervall ein Maximum bzw. Minimum sind, die Steigung 0 haben, d.h., die Ableitung in diesen Punkten muß gleich 0 sein. (Es kann jedoch Punkte geben, auf die (C) zutrifft, die jedoch keine Maxima oder Minima sind, (C) ist eine notwendige, jedoch keine hinreichende Bedingung.) Bestimmen wir zunächst die möglichen Kanditaten für unsere Funktion (A). Es gilt

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0. \qquad \text{(D)}$$

Durch Lösen der quadratischen Gleichung (D) findet man zwei Kanditaten, $x_{E,1} = 1 - 1/\sqrt{3}$ und $x_{E,2} = 1 + 1/\sqrt{3}$.

Zum Überprüfen, ob es sich bei den nach Kriterium (C) gefundenen Punkten um Extremstellen handelt, verwendet man folgenden Satz: *Wenn für $x = x_0$ gilt*

$$f'(x_0) = 0 \qquad \textit{und} \qquad f''(x_0) < 0$$

so besitzt die Funktion $f(x)$ and der Stelle x_0 ein Maximum. Gilt dagegen

$$f'(x_0) = 0 \qquad \textit{und} \qquad f''(x_0) > 0$$

so besitzt $f(x)$ an der Stelle x_0 ein Minimum. Den Spezialfall $f''(x_0) = 0$, also eine Stelle, an der sowohl erste als auch zweite Ableitung verschwinden, behandeln wir später. Für unsere beiden Kanditatenstellen $x_{E,1}$ und $x_{E,2}$ gilt mit

$$f''(x) = 6x - 6 \qquad \text{(E)}$$

$$f''(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) = 6\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 6 < 0$$

und

$$f''(1+\frac{1}{\sqrt{3}}) = 6\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 6 > 0.$$

Die Funktion hat daher an der Stelle $x_{E,1}$ ein Maximum (Hochpunkt, H), und an der Stelle $x_{E,2}$ ein Minimum (Tiefpunkt, T),[†]

$$H = \left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big|\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) \approx (0,42|0,38), \qquad T = \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\Big|-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) \approx (1,58|-0,38).$$

(4) Wendepunkte: Ein Charakteristikum von Extremstellen (s. Punkt (3)) ist die Änderung des Vorzeichens der Steigung der Tangente, d.h., der ersten Ableitung (daraus folgt auch die notwendige Bedingung (C)). Als *Wendepunkte* bezeichnet man diejenigen Punkte, in denen die Steigung der Kurve (die erste Ableitung) ein Maximum oder ein Minimum hat. Wir suchen also Extremstellen der ersten Ableitung, und somit Punkte, die die Bedingung

$$f''(x_0) = 0 \qquad \text{(F)}$$

erfüllen. Zusätzlich zu (F) muß an den Stellen (der Stelle) x_0 auch noch gelten, daß die dritte Ableitung $f'''(x_0) \neq 0$.[‡] In unserem Beispiel folgt aus (E), daß die zweite Ableitung an der Stelle $x_{W,1} = 1$ verschwindet (weiters ist $f'''(x_{W,1} = 6 \neq 0)$, die Funktion hat daher an der Stelle

$$W = N_2 = (1|0)$$

einen Wendepunkt.

Die eben besprochenen Regeln für Extremstellen und Wendepunkte versagen, wenn z.B. sowohl erste als auch zweite Ableitung verschwinden, oder ganz allgemein wenn an einer Stelle x_0 die ersten n Ableitungen der Funktion verschwinden, d.h.

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0.$$

In diesem Fall gilt folgende allgemeine Regel: *Ist die Ordnung der Ableitung, die an der Stelle x_0 erstmalig nicht verschwindet,* gerade*, dann besitzt $f(x)$ dort eine (relative) Extremstelle: für einen negativen Wert ein Maximum, für einen positiven ein Minimum. Ist die Ordnung dieser Ableitung* ungerade*, dann besitzt die Funktion an dieser Stelle keinen Extrempunkt, sondern einen Wendepunkt* Zur Illustration betrachten wir $f_1(x) = x^3$ und $f_2(x) = x^4$. Für $f_1(x)$ gilt an der Stelle $x_0 = 0$

$$f_1'(0) = f_1''(0) = 0 \qquad \text{sowie} \qquad f'''(0) = 6,$$

somit ist der Punkt (0|0) ein Wendepunkt. Für $f_2(x)$ gilt

$$f_2'(0) = f_2''(0) = f'''(0) = 0 \qquad \text{sowie} \qquad f^{(4)}(0) = 24,$$

und die Funktion hat im Punkt (0|0) ein Minimum.

[†]Die Versuchung bei derartigen Rechnungen zum Taschenrechner zu greifen ist groß, aber das explizite Rechnen mit $\sqrt{3}$ hat seine Vorteile. Erstens ist es genauer, zweitens vermeidet es Tippfehler. Und manchmal ist es einfach schneller: Bis Sie die zweiten Ableitungen an den Kanditatenstellen mit dem Taschenrechner ausgerechnet haben, haben Sie auch schon überprüft, ob diese > 0 oder < 0 sind. . . Das hier Gesagte gilt natürlich auch für andere irrationale Zahlen, π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ usw.

[‡]Soferne es sich nicht um Punkte handelt, für die sowohl $f'(x_0) = f''(x_0)$ gilt, kann dieser Test in der Praxis vernachlässigt werden. Der Fall verschwindender erster und zweiter Ableitung wird am Kapitelende kurz besprochen.

5 Integration

5.1 Das unbestimmte Integral

Es gibt zwei Ansatzpunkte, die zur Integralrechnung führen. Der klassische Ausgangspunkt ist die Bestimmung des Flächeninhalts unter einer Kurve (diese Frage ist eng mit dem Problem der Steigung der Tangente an einem Punkt einer Kurve verwandt, der Frage also, die zur Differentialrechnung führte). Dies war vermutlich der Zugang zur Integralrechnung, wie Sie ihn in der AHS gelernt haben. Wir verwenden aus Zeitgründen folgenden alternativen Zugang (dessen Erarbeitung durch Leibniz und Newton zu den Sternstunden der Mathematik gehört!): *Integration ist die Umkehrung der Differentiation.*

Es sei $y = f(x)$ eine auf einem Intervall I definierte Funktion. Dann bezeichnet man als *Stammfunktion* eine differenzierbare Funktion $F(x)$, die ebenfalls auf I definiert ist, und deren Ableitung gleich $f(x)$ ist, d.h.

$$F'(x) = f(x) \tag{45}$$

Da die Ableitung einer Konstanten C nach x verschwindet ($dC/dx = 0$), gibt es zu einem $f(x)$ unendlich viele Stammfunktionen

$$\begin{aligned} f(x) &\Rightarrow F(x) + 1 \\ f(x) &\Rightarrow F(x) \\ f(x) &\Rightarrow F(x) - 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

die alle Gl. 45 erfüllen. Als *unbestimmtes Integral* einer Funktion $f(x)$ bezeichnet man den allgemeinen Ausdruck

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{46}$$

Betrachten wir als Beispiel $y = x^2$, mit der Ableitung

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2x$$

Gln. 45 und 46 besagen, daß das Integral der Funktion $2x$ durch

$$\int 2xdx = x^2 + C$$

gegeben ist, *weil*

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + C\right) = 2x.$$

Das Integralzeichen $\int$ ist ein stilisiertes S, da (wie wir noch sehen werden) die formale Herleitung des Integrals mittels Summation erfolgt. Die zu integrierende Funktion $f(x)$ bezeichnet man als Integrand, und x ist die Integrationsvariable. Der Ausdruck dx bildet eine untrennbare Einheit, die beiden Schreibweisen

$$\int f(x)\,dx = \int dx\,f(x) = F(x) + C$$

sind äquivalent.

Momentan ist die *Integrationskonstante* C von geringer Bedeutung, und im praktischen Rechnen läßt man Sie sehr oft unter den Tisch fallen. In manchen Anwendungen hat die Integrationskonstante allerdings eine grosse Relevanz, ein Beispiel werden wir im Kapitel Differentialgleichungen sehen.

Bezüglich der Existenz der Stammfunktion erwähnen wir nur, daß eine auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige Funktion $f(x)$ auf diesem Intervall auch eine Stammfunktion $F(x)$ besitzt. Für isolierte Unstetigkeitsstellen ist das Intervall in entsprechende Teilintervalle zu zerlegen.

Der Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation ermöglicht das Finden von Stammfunktionen für viele Funktionsklassen. Ein paar Beispiele. Wir suchen

$$\int dx\, x^2$$

Da Differentiation jede Potenz um eins erniedrigt, ist es naheliegend, eine Stammfunktion der Form $F(x) = \alpha x^3$ zu vermuten. Nach Gl. 45 muß gelten

$$F'(x) = \alpha\, 3x^2 = f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{3},$$

d.h.,

$$\int dx\, x^2 = \frac{x^3}{3} + C.$$

Man kann sich unschwer davon überzeugen, daß in Umkehrung der Potenzregel für das Differenzieren für die Stammfunktion von Potenzen gilt

$$\int dx\, x^a = \frac{1}{a+1} x^{a+1}, \qquad a \neq -1.$$

Als weiteres Beispiel suchen wir die Stammfunktion zu $f(x) = \sin x$. Aus $(\cos x)' = -\sin x$ folgt

$$\int dx\ \sin x = -\cos x + C$$

und ebenso gilt

$$\int dx\ \cos x = \sin x + C.$$

(Achtung: Bei Differentiation und Integration von Sinus und Cosinus nicht die Vorzeichen durcheinanderbringen!) Und natürlich muß gelten, daß

$$\int dx\, e^x = e^x + C.$$

Entsprechende Tabellen der sogenannten Grundintegrale finden Sie in jeder Formelsammlung, z.B. [Bartsch S. 150].

5.2 Techniken zum Finden von Stammfunktionen

In Analogie zu den Rechenregeln fürs Differenzieren gibt es einige Techniken zum Ermitteln von Stammfunktionen, die wir im Folgenden vorstellen und mit Beispielen illustrieren wollen. Zunächst folgt aus den Rechenregeln für das Differenzieren, daß für die Stammfunktion bzw. das unbestimmte Integral gilt:

$$\int a\, u(x)dx = a \int u(x)dx \tag{47}$$

$$\int (u(x) + v(x))\, dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx \tag{48}$$

Beispiel:

$$\int dx\, (5e^x - 3x^2) = 5 \int dx\, e^x - 3 \int dx\, x^2 = 5e^x - 3\frac{x^3}{3} = 5e^x - x^3 + C.$$

Bitte überzeugen Sie sich bei jedem Beispiel indem Sie die Probe durch Differenzieren machen — Gl. 45 muß immer gelten!

5.2.1 Vereinfachen des Integranden

Im Gegensatz zum Differenzieren gibt es beim Integrieren kein festes Regelbuch, nach dem man vorgehen kann. Beim Suchen der Stammfunktion ist es daher noch wichtiger als beim Differenzieren, die zu integrierende Funktion $f(x)$ so weit als möglich zu vereinfachen *oder umzuformen.* Besonders wichtig ist dies bei trigonometrischen Funktionen. Als Beispiel* betrachten wir

$$\int dx\, \sin x\, \cos x.$$

Erinnern Sie sich an die Summensätze,†, insbesodere $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. Unser Integral läßt sich damit zu

$$\int dx\, \sin x\, \cos x = \frac{1}{2} \int dx\, \sin 2x$$

umformen, wobei wir außerdem noch Gl. 47 benutzt haben. Das "Erraten" der Stammfunktion sollte jetzt nicht mehr schwer sein. Diese muß proportional $\cos 2x$ sein, denn $(\cos 2x)' = -2\sin 2x$. Insbesondere gilt

$$\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)' = \sin 2x,$$

und somit

$$\int dx\, \sin x\, \cos x = \frac{1}{2} \int dx\, \sin 2x = -\frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

*Sie können sich gerne mit partieller Integration versuchen (s. nächster Abschnitt), aber beschweren Sie sich nicht bei mir, wenn Sie sich verrechnen!

†Auf die Gefahr hin, mich zu wiederholen: Sie müssen diese Sätze nicht auswendig können, aber Sie müssen die Muster erkennen, auf die ein Summensatz angewandt werden kann (so wie in unserem Beispiel), und Sie müssen wissen, wo Sie in Ihrer Formelsammlung nachzuschauen haben — [Bartsch S. 122]

Machen wir zur Sicherheit die Probe (ohne die Integrationsschritte exakt umzudrehen. Ein weiterer Summensatz besagt, daß $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Wir haben also

$$\left(-\frac{1}{4}\cos 2x + C\right)' = \left(-\frac{1}{4}(1 - 2\sin^2 x) + C\right)' = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x + C\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\, 2\sin x \cos x = \sin x \cos x,$$

d.h. Gl 45 ist erfüllt.

5.2.2 Substitution

Die vermutlich wichtigste Differentiationsregel ist die Kettenregel. Ihre "Umkehrung" führt auf die *Substitutionsmethode* der Integration. Wir zeigen zunächst einen Spezialfall (manchmal *logarithmische Integration* genannt und als eigene Regel behandelt), bevor wir den allgemeinen Fall betrachten. Der Ausgangspunkt in diesem sowie im nächsten Abschnitt ist immer folgender: Wir berechnen die Ableitung einer (Klasse von) Funktion(en), und gewinnen durch Umkehrung eine Regel zur Integration für gewisse Typen von Funktionen.

Als erstes betrachten wir die Funktion $F(x) = \ln|g(x)|$. Deren Ableitung hat die Form

$$F'(x) = (\ln|g(x)|)' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Gln. 45 und 46 besagen jetzt aber, daß Integrale der Form $\int dx\, f(x)$ mit $f(x) = g'(x)/g(x)$ wie folgt gefunden werden können:

$$\int dx\, \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C. \tag{49}$$

Wir benützen Gl. 49 gleich, um die Stammfunktion zu $f(x) = \tan x$ zu finden,

$$\int dx \tan x = \int dx \frac{\sin x}{\cos x} = -\int dx \frac{\overbrace{-\sin x}^{f'(x)}}{\underbrace{\cos x}_{f(x)}} = -\ln|\cos x| + C,$$

wie durch Differentiation des Ergebnisses leicht zu überprüfen ist. Als weiteres Beispiel betrachten wir

$$\int dx \frac{\overbrace{2x+3}^{f'(x)}}{\underbrace{x^2+3x-5}_{f(x)}} = \ln\left|x^2+3x-5\right| + C$$

Um zur eigentlichen Substitutionsregel zu kommen, betrachten wir die Ableitung einer Funktion

$$F(t) = F(g(x)),$$

d.h., $t = g(x)$. Mit der Kettenregel finden wir

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))\,g'(x) = f(g(x))\,g'(x) = f(t)\frac{dt}{dx}$$

Daraus ergibt sich folgende Integrationsregel

$$\int dx\, f(g(x))g'(x) = \int dx\, f(t)\,\frac{dt}{dx} = \int dt\, f(t). \tag{50}$$

Man ändert durch die *Substitution* $t = g(x)$ die Integrationsvariable von x auf t, wobei der Differentialquotient dt/dx wie ein normaler Bruch manipuliert wird (insbesondere darf durch dx "gekürzt" werden). Danach sucht man die Stammfunktion $F(t)$ zu $f(t)$ und ersetzt t wieder durch $t = g(x)$.

Beispiele: (1) Mit $t = x^2$ und $dt/dx = 2x$ bzw. $dx = dt/2x$ erhält man

$$\int dx\, xe^{x^2} = \int dx\, xe^t = \int \frac{dt}{2x}\, x\, e^t = \frac{1}{2}\int dt\, e^t = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

(2) Das folgende Beispiel illustriert, daß Gl. 49 eigentlich ein Spezialfall von Gl. 50 ist: Mit $t = 1 + x^2$, $dt/dx = 2x$ bzw. $dx = dt/2x$ erhält man

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \int \frac{x\,dx}{t} = \int \frac{x(dt/2x)}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

(Hier ist kein Betragszeichen nötig, denn das Argument des Logarithmus kann nicht negativ werden.

(3) Oft sind Stammfunktionen von Funktionen des Typs $f(\alpha x + \beta)$, z.B. $\exp(2x+7)$, $\cos(2-5x)$, $\sqrt{3x+7}$ usw. gesucht. Man kann sich überlegen, daß die dazugehörigen Stammfunktionen $(1/2)\exp(2x+7)$, $-(1/5)\sin(2-5x)$ sowie $(2/9)(2x+7)^{3/2}$ sind (zumindestens kann man die Richtigkeit der Behauptung durch Differenzieren überprüfen). Ist man sich unsicher, so kann man in solchen Fällen die Stammfunktion immer durch die Substition $t = \alpha x + \beta$ finden: Z.B. für $f(x) = \sqrt{3x+7}$ erhält man mit $t = 3x + 7$ und $dt/dx = 3$ bzw. $dx = dt/3$

$$\int dx\,\sqrt{3x+7} = \frac{1}{3}\int dt\, t^{1/2} = \frac{1}{3}\,\frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{9}(3x+7)^{3/2} + C,$$

wie behauptet.

Es gibt noch eine *zweite Substitutionsregel*, deren allgemeine Behandlung zu weit führen würde. Zur Vollständigkeit jedoch ein Beispiel.* Gesucht ist die Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Der Ausdruck läßt sich nicht vereinfachen, und normale Substitution (also z.B. $t = 1 - x^2$) hilft nichts, da die alte Integrationsvariable x nicht wegfällt. Wenn Sie in Formelsammlungen stöbern (z.B. [Bartsch S. 152 oben]), finden Sie den Hinweis es mit

$$x = x(t) = \sin t \qquad \text{bzw.} \qquad t = \arcsin x \qquad \text{(I)}$$

zu versuchen. Schauen wir einmal, was das bringt, auch wenn dies "verrückt" scheinen mag (wir "ersetzen" eine einfache Variable durch eine Funktion). Aus (I) folgt weiters

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \qquad \text{bzw.} \qquad dx = \cos t\, dt. \qquad \text{(II)}$$

*Hinweis: Sollte ein derartiges Beispiel zur Prüfung kommen (was nicht wahrscheinlich ist), dann ist die Substitution angegeben!

Damit erhalten wir für das gesuchte Integral

$$\int dx\,\sqrt{1-x^2} = \int dt\,\cos t\,\underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\cos t} = \int dt\,\cos^2 t.$$

Das neue Integral läßt sich jetzt mittels der trigonometrischen Identität $\cos^2\alpha = (1/2)\,(1+\cos 2\alpha)$ [Bartsch S. 123] lösen,

$$\int dt\,\cos^2 t = \frac{1}{2}\int dt\,(1+\cos 2t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C. \qquad \text{(III)}$$

Fertig sind wir jetzt jedoch noch nicht, denn wir müssen noch die ursprünglichen Variable x rücksubstituieren. Der erste Term in (III) bereitet wegen (I) keine Probleme. Den zweiten Term wandeln wir mittels $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,\cos\alpha$ [Bartsch S. 122] in eine Funktion von $\sin t = x$ und $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}$ um. Wir erhalten

$$\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{4}\,2\underbrace{\sin t}_{x}\;\underbrace{\cos t}_{\sqrt{1-x^2}} + C = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C. \qquad \text{(IV)}$$

Überzeugen Sie sich durch Differenzieren, daß (IV) tatsächlich die gesuchte Stammfunktion $F(x)$ zu $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ist.

5.2.3 Partielle Integration

Genauso wie Substitution die Umkehrung der Kettenregel ist, so folgt die Methode der *partiellen Integration* aus der Produktregel. Wir differenzieren zunächst eine Funktion der Form $F(x) = G(x)\,H(x)$, d.h.

$$F'(x) = G'(x)\,H(x) + G(x)\,H'(x) = g(x)\,H(x) + G(x)\,h(x)$$

Integriert man jetzt diesen Ausdruck, so folgt

$$\int dx\,F'(x) = F(x) = G(x)\,H(x) = \int dx\,g(x)\,H(x) + \int dx\,G(x)\,h(x)$$

bzw.

$$\int dx\,g(x)\,H(x) = G(x)\,H(x) - \int dx\,G(x)\,h(x) \qquad (51)$$

Gl. 51 kann zur Integration von Funktionen $f(x)$ verwendet werden, die selbst wieder das Produkt zweier Funktionen, $f(x) = g(x)\,H(x)$, sind. Von einer der Teilfunktionen, $g(x)$, muß die Stammfunktion $G(x)$ bekannt sein bzw. z.B. mittels Substitution ermittelbar sein.

Beispiel: Im Integral $\int dx\,x\sin x$ setzen wir $g(x) = \sin x$ und $H(x) = x$. Für die Anwendung von Gl. 51 benötigen wir $G(x) = -\cos x$ und $H'(x) = h(x) = 1$.

$$\int dx\,x\sin x = \underbrace{x}_{H(x)}\cdot\underbrace{(-\cos x)}_{G(x)} - \int dx\,\underbrace{1}_{h(x)}\cdot\underbrace{(-\cos x)}_{G(x)} =$$

$$= -x\cos x + \int dx\,\cos x = -x\cos x + \sin x + C.$$

In diesem Beispiel könnte man natürlich im Prinzip auch $g(x) = x$ und $H(x) = \sin x$ setzen, d.h. x integrieren und $\sin x$ differenzieren. Allerdings würde dann das Integral auf der rechten Seite von Gl. 51 komplizierter.

Die Produktregel der Differentiation ist eine Grundgegel, und muß angewandt werden, wann immer in der zu differenzierenden Funktion das Produkt zweier die Differentiationsvariable enthaltenden Faktoren auftritt. Bei der Integration bedingt das Auftreten eines Produkts im Integranden, d.h. $f(x)$ ist von der Form $f(x) = g(x)h(x)$, nicht notwendigerweise die Anwendung von *partieller Integration*. Erinnern Sie sich:

$$\int dx\, x\, e^{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Substitution,}$$

$$\int dx\, \sin x\, \cos x \qquad \Rightarrow \qquad \text{Trig. Vereinfachung.}$$

Partielle Integration sollte also erst dann versucht werden, wenn die anderen uns bekannten Methoden zum Suchen von Stammfunktionen nicht funktionieren.

Andererseits hat die Methode der partiellen Integration zwei interessante Anwendungen. Erstens suchen wir die Stammfunktion der Funktion $f(x) = e^x \sin x$.* In diesem Fall ist es egal, welche Funktion man gleich $g(X)$ setzt (also integriert) bzw. gleich $H(x)$ setzt (also differenziert). Wir setzen $g(x) = e^x$, $H(x) = \sin x$ und erhalten nach einmaliger Anwendung von Gl. 51

$$J = \int dx\, e^x \sin x = e^x \sin x - \int dx\, e^x \cos x$$

Der Schlüsselschritt besteht jetzt darin, das neue Integral auf der rechten Seite nochmals partiell zu integrieren:

$$J = e^x \sin x - \int dx\, e^x \cos x = e^x \sin x - [e^x \cos x - \underbrace{\int dx\, e^x(-\sin x)}_{-J} = e^x(\sin x - \cos x) - J$$

Das gesuchte Integral J taucht links und rechts auf. Auflösen nach J ergibt

$$J = \int dx\, e^x \sin x = e^x \frac{\sin x - \cos x}{2}$$

Eine zweite interessante Anwendung stellt das Integral

$$\int dx\, \ln x = \int dx\, 1 \cdot \ln x$$

dar. Die suggestive Schreibweise auf der rechten Seite macht klar, wie partielle Integration angewandt werden kann — 1 wird integriert, $\ln x$ differenziert (integrieren können wir diese Funktion ja noch nicht.

$$\int dx\, 1 \cdot \ln x = x \ln x - \int dx\, x \frac{1}{x} = \ln x - x + C$$

*Eine Alternative zu oben gezeigter Anwendung der partiellen Integration wäre die Stammfunktion von $\tilde{f}(x) = e^x(\cos x + i \sin x) = e^x\, e^{ix} = e^{(1+i)x}$ zu suchen ($\tilde{F}(x) = \frac{1}{1+i} e^{(1+i)x}$), und das Ergebnis (nach Reellmachen des Nenners) in Realteil und Imaginärteil zu trennen.

5.2.4 Formelsammlungen, Computeralgebra

Die Methode der partiellen Integration beendet unsere kurze Exkursion in Integrationstechniken (Methoden zum Suchen von Stammfunktionen). Die zweite Sustitutionsregel konnte nur gestreift werden, und die Methode der *Partialbruchzerlegung* für rationale Funktionen haben wir überhaupt ausgelassen. Selbst die obige Kurzeinführung in die wichtigsten Integrationstechniken sollte Ihnen gezeigt haben, daß das Suchen der Stammfunktion keinesfalls trivial ist, und, vor allem, daß es keine systematische Anleitung, kein "Kochrezept" gibt. Aus diesem Grund gibt es seit jeher sogenannte Integraltafeln, Formelsammlungen enthalten meist (mehr oder weniger) Kurzversionen derselben. (Die besonders kurze Version im [Bartsch] finden Sie auf S. 234ff.) Integraltafeln sind in der Hand des *erfahrenen* Benutzers eine wichtige Hilfe. Das Hauptproblem für den Anfänger besteht einerseits im Zurechtfinden (die Organisation von Integraltafeln variiert), und in der kompakten Schreibweise für den allgemein möglichsten Fall eines bestimmten Integraltyps. Oft ist auch eine vereinfachende Substitution oder partielle Integration notwendig, um die gesuchte Stammfunktion überhaupt in der Formelsammlung zu finden. Mindestkenntnisse in Integration, wie sie die obigen Abschnitte vermitteln sollen, sind daher unerläßlich. Ich empfehle Ihnen, alle in diesem Abschnitt berechneten Integrale auch durch Nachschlagen in der Integraltafel Ihrer Formelsammlung zu lösen.

Seit einigen Jahren haben Integraltafeln Konkurrenz durch Computeralgebrasysteme bekommen (Mathematica, Maple, manche "Taschenrechner"). In ihren letzten Versionen behaupten Mathematica und Maple, jedes mit Hilfe von Integraltafeln lösbare unbestimmte Integral ebenfalls lösen zu können. Sinngemäß gelten jedoch die gleichen Warnungen wie für Integraltafeln — auch die Verwendung von Computeralgebrasystemen will gelernt sein. Wenn Sie Zugang zu einem solchen Programm haben, machen Sie sich damit vertraut, und verwenden Sie das Programm um sich selbst zu testen! Aus Fairnessgründen ist die Verwendung von Computeralgebrasystemen und Taschenrechnern, die mit solchen ausgestattet sind, bei der Prüfung jedoch untersagt.

Integration ist nicht nur schwerer als Differentiation, es gibt auch den Fall, daß zu einer Funktion $f(x)$ die Stammfunktion nicht in elementarer Form angegeben werden kann. So gibt es zum Beispiel keine uns bekannten Funktionen, deren Ableitung (vgl. Gl. 45) z.B. $\exp(x^2)$, $\sin(x^2)$ oder $\cos(x^2)$ ergeben. Andererseits müssen die Stammfunktionen dieser Funktionen existieren (s. die Anmerkung zur Existenz des Integrals auf S. 40). Wir können diesen offensichtlichen Widerspruch erst nach der Einführung von Potenzreihen lösen bzw. aufklären.

5.3 Das bestimmte Integral

Wir fallen jetzt ein weiteres Mal "mit der Tür ins Haus" und beginnen unsere Untersuchung des sogenannten *bestimmten* Integrals mit dem

5.3.1 Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

Dieser besagt, daß

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{52}$$

wobei

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C \qquad \text{bzw.} \qquad F'(x) = f(x)$$

die aus Gln. 45 bzw. 46 bekannte Bedeutung hat. Der Ausdruck

$$\int_a^b f(x)dx$$

wird als *bestimmtes Integral* der Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ bezeichnet, die Rückführung des bestimmten Integrals auf die Differenz der Funktionswerte der Stammfunktion $F(x)$ an den Stellen a und b (Gl. 52) wird als *Hauptsatz der Differential und Integralrechnung bezeichnet.*

Ein Beispiel zur Berechnung eines bestimmten Integrals:

$$\int_1^3 dx\,x^2 = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}.$$

Man beginnt also mit der Berechnung der Stammfunktion zu $f(x) = x^2$, d.h., $F(x) = x^3/3$, und bildet dann die Differenz zwischen $F(x)$ an der oberen $F(x = 3)$ und der unteren Grenze $F(x = 1)$.

5.3.2 Was ist das bestimmte Integral

Es ist nun an der Zeit, die Bedeutung des bestimmten Integral zu untersuchen. Wir stützen uns dabei auf den Mittelwertsatz (MWS) der Integralrechnung, der unmittelbar aus dem MWS der Differentialrechnung (Gl. 36) folgt. Zur Erinnerung, letzterer lautet

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

d.h., es gibt in einem offenen Intervall $]a, b[$ (mindestens) einen Punkt c, in dem die Steigung der Tangente, d.h., $f'(c)$ gleich der Steigung der Sekante durch die Randpunkte a, b ist (linke Seite des MWS). In den Voraussetzungen zum MWS der Differentialrechnung (S. 29) ist nichts enthalten, was die Gültigkeit des Satzes für Stammfunktionen verbieten würde. Ersetzen wir also f in Gl. 36 durch F um klar zu machen, daß wir von Stammfunktionen reden, so erhalten wir den MWS der Integralrechnung,

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(c) = f(c). \tag{53}$$

Abb.:Zum MWS und Bedeutung des bestimmten Integrals

[Fig.xx.a] [Fig.xx.b] [Fig.xx.b]

Mit Gl. 53 erhalten wir sofort folgende Beziehung für das bestimmte Integral (Gl. 52)

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a) = f(c)\,(b-a) \qquad \text{(A)}$$

Die geometrische Aussage von Gl. (A) ist in Abb. xx.a illustriert (wobei der Punkt c in der Abbildung mit "künstlerischer Freiheit" gewählt wurde). Das bestimmte Integral einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ entspricht dem Flächeninhalt eines Rechtecks der Länge $(b-a)$ und Höhe $f(c)$, d.h., dem Wert der Funktion an einem Punkt c, von dem wir nur wissen daß er auf dem Intervall $a < c < b$ liegt.*

Als nächstes führen wir einen Zwischenpunkt x_1 mit $a < x_1 < b$ ein, und erweitern $F(b) - F(a)$ zu

$$F(b) - F(a) = [F(b) - F(x_1)] + [F(x_1) - F(a)]. \qquad \text{(B)}$$

Für jedes Paar in eckigen Klammern auf der rechten Seite von (B) gilt wieder der MWS der Integralrechnung Gl. 53, sodaß (B) auch wie folgt geschrieben werden kann

$$F(b) - F(a) = (b - x_1)\,f(c_1) + (x_1 - a)\,f(c_0) = (x_2 - x_1)\,f(c_1) + (x_1 - x_0)\,f(c_0) \qquad \text{(C)}$$

Im letzten Schritt haben wir zur Vereinheitlichung der Notation $a = x_0$ und $b = x_2$ gesetzt. Für die (unbekannten) Zwischenpunkte c_0 und c_1 gilt $a = x_0 < c_0 < x_1$ und $x_1 < c_1 < x_2 = b$. Die geometrische Aussage von (C) ist in Abb. xx.b illustriert (c_0 und c_1 sind wieder mit "künstlerischer Freiheit" gewählt).

Als nächstes (s. auch Abb. xx.c) führen wir statt dem einen Zwischenpunkt x_1 $n-1$ Zwischenpunkte x_i $(i = 1, \dots, n-1)$ ein, und bezeichnen $a = x_0$ und $b = x_n$. Damit erhält man unter Anwendung des Mittelwertsatzes Gl. 53

$$\begin{array}{rcrclcrl} F(b) - F(a) & = & F(x_n) & - & F(x_{n-1}) & = & (x_n - x_{n-1})\cdot & f(c_{n-1}) \\ & & +\,F(x_{n-1}) & - & F(x_{n-2}) & & +\,(x_{n-1} - x_{n-2})\cdot & f(c_{n-2}) \\ & & +\,F(x_{n-2}) & - & F(x_{n-3}) & & +\,(x_{n-2} - x_{n-3})\cdot & f(c_{n-3}) \\ & & \dots & - & \dots & & \dots & \\ & & +\,F(x_2) & - & F(x_1) & & +\,(x_2 - x_1)\cdot & f(c_1) \end{array} \qquad \text{(D)}$$

Faßt man diesen unhandlichen Ausdruck mittels Summationsschreibweise $\sum$ zusammen und kürzt die Differenzen $x_{i+1} - x_i$ auf der rechten Seite mit Δx_i ab, so kann man (D) auch in der Form

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(F(x_{i+1}) - F(x_i)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta x_i \qquad \text{(E)}$$

schreiben. Gl. (D) bzw. Gl. (E) ist graphisch in Abb. xx.c dargestellt, wobei wir natürlich prinzipiell wieder nicht genau wissen, wo die c_i liegen, wenngleich $x_{i+1} < c_i < x_i$ gilt. Man kann jedoch annehmen, daß die genaue Lage der c_i und damit der exakte Wert der $f(c_i)$ eine um so geringere Rolle spielen wird, je kleiner Δx_i wird, d.h., je mehr Rechtecke man an die Kurve (die Funktion) $f(x)$ anpasst. Gleichzeitig sieht man, daß die Summe der Flächen dieser Rechtecke — *unabhängig* von der genauen Lage der c_i — mit feinerwerdendem Δx_i mehr und mehr den

*Wir nehmen hier und im folgenden ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, daß $a < b$.

Fächeninhalt, der zwischen $a = x_0$ und $b = x_n$ von $f(x)$ und der x-Achse eingeschlossen wird, beschreibt.

Die vage Formulierung "feiner und feiner" deutet bereits auf einen Grenzübergang hin, und zwar $\Delta x_i \to 0$. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_{x_0}^{x_n} dx\, f(x) = \int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a), \tag{54}$$

und zwar für jede beliebige Wahl der Zwischenstellen $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$, so bezeichnet man diesen Grenzwert als das *bestimmte Riemannsche Integral* der betreffenden Funktion im Intervall $[a, b]$. Ändert die Funktion auf dem Intervall ihr Vorzeichen nicht (wie in Abb. xx.a–xx.c), so ist das bestimmte Integral gleich dem Flächeninhalt unter der Kurve.

Der Grenzübergang auf der linken Seite von Gl. 54 entspricht dem traditionellen Zugang zum (Riemannschen) Integral. Die Berechnung der Fläche unter einer Kurve war eine der klassischen Fragestellungen, die zur Entwicklung der Integralrechnung führten. (Bestimmte) Integrale tauchen in den Naturwissenschaften immer dann auf, wenn ein Problem durch sukzessive feinere Summenbildung gelöst werden kann. Was Sie von diesem Abschnitt behalten sollen, sind nicht die Details der Ableitung, sondern der Typ von Problemstellung, der zu Integralen führt, d.h.

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i (\ldots)\Delta x_i \Rightarrow \int dx\, (\ldots)$$

Der Inhalt der Klammern $(\ldots)$ folgt aus der Problemstellung. Man stößt auf Ausdrücke dieser Art bei der Flächen- und Volumsberechnung, sowie bei der Berechnung der Länge eines arbiträren Kurvenstücks. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden wir den Übergang von diskreten Wahrscheinlichkeiten zu kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsdichten mittels Übergang von Summation zu Integration bewerkstelligen.

5.3.3 Rechenregeln für bestimmte Integrale

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung reduziert die Berechnung des bestimmten Integrals im wesentlichen auf die Bestimmung der Stammfunktion. Das Finden einer Stammfunktion ist wie schon erwähnt oft keineswegs trivial, und so mag der Eindruck entstehen, daß Integration im wesentlichen mit Stammfunktionen bzw. unbestimmten Integralen zu tun hat. Vom Standpunkt der Anwendung jedoch steht meistens bestimmte Integralen (sowie deren Erweiterung, die sogenannten uneigentliche Integrale (s. S. 5.4)) im Mittelpunkt, und daher müssen wir uns als nächstes mit den Rechenregeln für bestimmte Integrale auseinandersetzen.

Diese lauten wie folgt:

Unabhängigkeit von der Integrationsvariablen: Wir haben schon in der Einführung in den Funktionsbegriff angemerkt, daß die Wahl des Symbols für die Variable einer Funktion völlig irrelevant ist. Das trifft insbesondere auf die Integrationsvariable zu:

$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_a^b dv\, f(v), \tag{55}$$

z.B.,

$$\int_0^3 x^2\,dx = \int_0^3 t^2\,dt = \int_0^3 (\text{hansi})^2\,d(\text{hansi}) = 3$$

Vertauschung der Integrationsgrenzen: Mittels Gl. 52 findet man sofort

$$\int_b^a dx\,f(x) = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b dx\,f(x) \tag{56}$$

Daraus folgt

$$\int_0^3 x^2\,dx = 3 \qquad \int_3^0 x^2\,dx = -3$$

Auf die Konsequenzen für die Flächenberechnung kommen wir in Abschnitt 5.3.4 zurück.

Gleiche obere und untere Integrationsgrenze: Aus (52) folgt weiters, daß

$$\int_a^a dx\,f(x) = F(a) - F(a) = 0. \tag{57}$$

Aufspaltung des Integrationsintervalls: Schließlich gilt, daß

$$\int_a^b dx\,f(x) = F(b) - F(a) = (F(b) - F(c)) + (F(c) - F(a)) = \int_a^c dx\,f(x) + \int_c^b dx\,f(x). \tag{58}$$

5.3.4 Anmerkung zur Flächenberechnung

An dieser Stelle eine kurze Anmerkung zur Verwendung des bestimmten Integrals zur Flächenberechnung. Gesucht ist zunächst die Fläche A unter der Sinusfunktion zwischen 0 und π (180°). Gemäß den Schlußfolgerungen von Abschnitt 5.3.2 vermuten wir, daß

$$A = \int_0^\pi dx\,\sin x = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2.$$

Soweit so gut. Wie sieht es aber mit der Fläche zwischen 0 und 2π aus?

$$A = \int_0^{2\pi} dx\,\sin x = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = -(1-1) = 0.$$

Dies ist wohl nicht ganz das erwartete Ergebnis. Betrachten wir die Konstruktion die zur Interpretation des bestimmten Integrals als Fläche unter der Kurve einer Funktion führte (Abschn. 5.3.2), so sieht man unschwer, daß die Beiträge zur Summe (deren Grenzwert das bestimmte Integral ist) gemäß dem Vorzeichen des Funktionswerts positives oder negatives Vorzeichen haben. Genau das passiert aber im zweiten Integral, der positive Beitrag zwischen 0 und π wird von einem genau gleich großem negativen Beitrag zwischen π und 2π kompensiert. Wohlgemerkt, das bestimmte Integral

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0.$$

Will man jedoch die Fläche die von der x-Achse und der Funktion auf einem Intervall eingeschloßen wird, so muß man das Integrationsintervall bei jeder Nullstelle unterteilen, und dann die Beträge der bestimmten Integrale addieren. In unserem Fall heißt das:

$$A = \left| \int_0^{\pi} dx\, \sin x \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} dx\, \sin x \right| = |2| + |-2| = 4.$$

Allgemein kann man schreiben: Die Fläche die im Intervall $[a, b]$ von einer Funktion $f(x)$, die an den Stellen $n_1, n_2, \ldots n_k$ Nullstellen hat, und der x-Achse eingeschloßen wird, berechnet sich gemäß

$$A = \left| \int_a^{n_1} dx\, f(x) \right| + \left| \int_{n_1}^{n_2} dx\, f(x) \right| + \ldots + \left| \int_{n_{k-1}}^{n_k} dx\, f(x) \right|. \tag{59}$$

5.3.5 Alternative Formulierung des Hauptsatzes

Vor Beendigung dieses Unterabschnitts über das bestimmte Integral wollen wir noch kurz ein wenig den Zusammenhang zwischen Stammfunktion, unbestimmtem Integral und bestimmtem Integral untersuchen.

Das bestimmte Integral

$$\int_a^b du\, f(u) = F(b) - F(a)$$

ist eine Zahl, die (mit etwas Vorsicht) geometrisch als Flächeninhalt interpretiert werden kann. Bis jetzt waren untere und obere Grenze festvorgegebene Zahlen. Wenn man jetzt die obere Grenze variabel macht, d.h. b durch eine Variable, z.B. x, ersetzt, dann erhält man gemäß

$$\int_a^x du\, f(u) = F(x) - F(a) \tag{60}$$

eine Funktion der oberen Grenze x. Will man obige Beziehung geometrisch interpretieren, dann hängt jetzt der Flächeninhalt A von der Lage der oberen Grenze ab, $A = A(x)$. Ein bestimmtes Integral mit variabler oberer Grenze ist also eine Funktion dieser oberen Grenze (und *nicht* der Integrationsvariablen!). Wir haben das in Gl. 60 durch Verwenden unterschiedlicher Symbole (x für die obere Grenze, u für die Integrationsvariable) explizit gemacht. Vergleicht man Gl. 60 mit dem unbestimmten Integral Gl. 46

$$\int dx\, f(x) = F(x) + C$$

so fallen unübersehbare Ähnlichkeiten auf, welche nicht zufällig sind. Die Konstante C entspricht $-F(a)$, in der Tat haben wir ja a und somit $F(a)$ nie näher spezifiert. Das unbestimmte Integral $\int dx\, f(x)$ entpuppt sich als verkürzte Schreibweise von Gl. 60, also eines bestimmten Integrals mit variabler oberer Grenze, die Variable der Stammfunktion ist eigentlich die variable obere Grenze eines bestimmten Integrals der Form Gl. 60.* Die exaktere Schreibweise für die Stammfunktion sollte also eigentlich lauten

$$F(x) = \int_a^x du\, f(u). \tag{61}$$

*Die hier präsentierte Sichtweise entspricht mehr der historischen Entwicklung, die vom Grenzwert Gl. 54 zum bestimmten Integral, und von diesem via Gl. 60 zum unbestimmten Integral bzw. dem Konzept der Stammfunktion führt.

In der Schreibweise von Gl. 61 versteckt sich die unbestimmte, additive Konstante in der nicht näher bestimmten unteren Grenze.

Unsere Überlegungen haben folgende praktische Konsequenz. Differenziert man Gl. 60 nach der oberen Grenze, so erhält man

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x} f(t)dt = \frac{dF(x)}{dx} - \underbrace{\frac{dF(a)}{dx}}_{=0} = F'(x) = f(x). \tag{62}$$

Gl. 62 ist eine alternative Schreibweise des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, der die inverse Beziehung zwischen Integration und Differentiation besonders deutlich hervorhebt. Zur Illustration von Gl. 62 möge folgendes Beispiel dienen:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x dt\, t^2 = x^2.$$

Sie können sich von der Korrektheit dieser Beziehung sofort überzeugen, indem Sie schrittweise vorgehen:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x dt\, t^2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{t^3}{3}\bigg|_a^x\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) = x^2$$

Gl. 62 funktioniert auch, wenn die obere Grenze nicht x, sondern eine Funktion von x ist. Es gilt

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} dt\, f(t) = \frac{d}{dx}\left(F(g(x)) - F(a)\right) = F'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x)$$

wobei der Schlüsselschritt die Anwendung der Kettenregel ist. Z.B. ist

$$\int_a^{\sqrt{x}} dt\, t^2 = (\sqrt{x})^2\, (\sqrt{x})' = \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2},$$

wie man sich (in diesem Fall!) durch schrittweises Nachrechnen überzeugen kann:

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\sqrt{x}} dt\, t^2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{t^3}{3}\bigg|_a^{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{3/2}}{3} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{3}{2}\frac{x^{1/2}}{3} = \frac{x^{1/2}}{2}.$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x^3} dt\, e^{t^2} = e^{x^6}\, 3x^2 = 3x^2\, e^{x^6}.$$

Die Kontrolle durch Berechnung des Integrals, gefolgt von Differentiation ist hier nicht möglich, da für e^{t^2} die Stammfunktion nicht in geschlossener Form (d.h. mit Hilfe von Standardfunktionen) gegeben werden kann.

5.4 Anmerkungen zu uneigentlichen Integralen

Zum Abschluß des Kapitels über Integration müssen wir noch ein paar in der Praxis sehr wichtige Erweiterungen des bestimmten Integrals streifen, die meist mit dem Überbegriff unbestimmte Integrale bezeichnet werden.

Wir betrachten zunächst folgendes Beispiel, das eine Falle enthält:

$$\int_{-2}^{+3} \frac{2x\,dx}{x^2-1}$$

Mit Hilfe von Substitution ($t = x^2 - 1$, $dx = dt/2x$) ist rasch die Stammfunktion gefunden, d.h.,

$$\int \frac{2x\,dx}{x^2-1} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|x^2-1\right|.$$

Setzt man nun für die obere und untere Grenze ein, so meint man das bestimmte Integral

$$\textit{falsch}! \qquad \int_{-2}^{+3} \frac{2x\,dx}{x^2-1} = \ln\left|x^2-1\right|\Big|_{-2}^{3} = \ln 8 - \ln 3 = \ln\frac{8}{3} \qquad \textit{falsch}!$$

leicht gefunden zu haben. *Obiges Ergebnis ist falsch!* Bei der Anwendung des Hauptsatzes darf man nicht leichtfertig über Stellen hinweggehen, an denen $f(x)$ nicht definiert ist, das ist in unserem Beispiel bei $x = \pm 1$ der Fall! Es gilt folgende Regel: *Der Hauptsatz der Integralrechnung (Gl. 52) darf auf Funktionen $f(x)$, die Singularitäten (also Stellen, an denen der Funktionswert gegen unendlich strebt und die nicht im Definitionsbereich enthalten sind) besitzt, nur angewandt werden, wenn die Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ im (in den) singulären Punkt(en) stetig ist.* In unserem Beispiel ist das nicht der Fall, denn $F(x = \pm 1) = \ln 0$ ist nicht definiert. *Generell gilt: Ist die Stammfunktion in den problematischen Punkten singulär, dann existiert das Integral nicht, man sagt auch es* divergiert. *Ist die Stammfunktion hingegen in diesen Punkten stetig, so kann der Hauptsatz normal angewandt werden.* Ausgestattet mit dieser Warnung / Regel betrachten wir ein weiteres Beispiel:

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_{-1}^{8}$$

Der Integrand $f(x) = x^{-1/3}$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht definiert (d.h., singulär), wir müssen also zunächst das Verhalten von $F(x) = 3/2\,x^{2/3}$ an dieser Stelle prüfen. Da $F(x = 0) = 0$ ist, und $F(x)$ somit an dieses Stelle stetig ist, darf der Hauptsatz normal angewandt werden, und man erhält:

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_{-1}^{8} = \frac{3}{2}\left(8^{2/3} - (-1)^{2/3}\right) = \frac{9}{2}.$$

Das erste Beispiel verdeutlicht, daß bei der Berechnung von bestimmten Integralen Vorsicht geboten ist, wenn der Integrand an einer oder mehreren Stellen des Integrationsintervalls unstetig ist, insbesondere, wenn es sich um eine *unendliche* Unstetigkeit oder Singularität handelt. Man bezeichnet jetzt bestimmte Integrale, wo derartige Probleme an einem oder beiden Enden des Integrationsintervalls auftreten, als *uneigentliche* Integrale. Weiters inkludiert man in diesem Begriff auch Fälle, in denen eine oder beide Integrationsgrenzen ∞ bzw. $-\infty$ sind. Hier ein paar Beispiele:

$$\text{(a)}\ \int_0^1 dx\,\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{(b)}\ \int_0^1 dx\,\frac{1}{x} \qquad \text{(c)}\ \int_0^\infty dx\,e^{-x} \qquad \text{(d)}\ \int_1^\infty dx\,\frac{1}{x}$$

Uneigentliche Integrale sind im wesentlichen Abkürzungen für Grenzwerte. Nehmen wir an, daß wir am Integral $\int_a^b dx\,f(x)$ interessiert sind, und $f(x)$ habe bei $x = a$ eine Unstetigkeit.

Das Integral versteht sich dann als der Grenzwert

$$\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^b dx\, f(x).$$

Dies trifft auf Beispiele (a) und (b) zu. Ob das Integral existiert oder nicht, hängt von der Existenz des Grenzwerts ab. In Fall (a) haben wir

$$\int_0^1 dx\, \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 dx\, \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon\to 0} \left(2\sqrt{x}\Big|_\epsilon^1 \right) = \lim_{\epsilon\to 0} \left(2 - 2\sqrt{\epsilon}\right) = 2$$

Da der Grenzwert existiert (und ohne Probleme berechnet werden kann), existiert das Integral und hat den Wert 2. In Fall (b) hingegen existiert der Grenzwert nicht:

$$\int_0^1 dx\, \frac{1}{x} = \lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 dx\, \frac{1}{x} = \lim_{\epsilon\to 0} \left(\ln x\Big|_\epsilon^1 \right) = \lim_{\epsilon\to 0} \left(-\ln\epsilon\right).$$

In unserer Kurzeinführung in die Berechnung von Grenzwerten haben wir auch Grenzwerte der Form $x \to \pm\infty$ behandelt. Integrationsgrenzen von $\pm\infty$ können auf diese Weise gehandhabt werden. Beispiel (c) ist z.B. eine Abkürzung von

$$\int_0^\infty dx\, e^{-x} = \lim_{a\to\infty} \int_0^a dx\, e^{-x} = \lim_{a\to\infty} \left(-e^{-x}\Big|_0^a \right) = \lim_{a\to\infty} \left(e^0 - e^{-a}\right) = 1.$$

Der Grenzwert existiert und beträgt 1, da $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$. In Beispiel (d) hingegen

$$\int_1^\infty dx\, \frac{1}{x} = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{dx}{x} = \lim_{a\to\infty} \left(\ln x\Big|_1^a \right) = \lim_{a\to\infty} \left(-\ln a\right)$$

existiert der Grenzwert nicht, denn $\ln x$ strebt für $x \to \infty$ ebenfalls gegen ∞.

Die eben besprochenen Beispiele sollen die Probleme, die bei uneigentlichen Integrale auftreten können, illustrieren. Wir konnten hier nur an der Oberfläche kratzen, und dies ist einer der Punkte, wo Sie sich im Zweifelsfall lieber an den zuständigen "Fachmann" (die zuständige "Fachfrau") wenden sollten. Andererseits treten uneigentliche Integrale so häufig in Anwendungen auf (wir werden ihnen nochmals in der Wahrscheinlichkeitstheorie begegnen!), daß Sie mit der Notation vertraut sein sollten.

Verwendete Literatur

beinhaltet u.a.

- M. D. Greenberg "Foundations of Applied Mathematics", Prentice-Hall,Englewood Cliffs 1978.
- E. Steiner "The Chemistry Maths Book", Oxford Science, Oxford, New York 1996.
- H. G. Zachmann "Mathematik für Chemiker", 4. Auflage, Verlag Chemie, Weinheim, Deerfield Beach, Basel 1981.
- W. I. Smirnow "Lehrbuch der höheren Mathematik", Teil I, 16. Auflage, Verlag Harri Deusch, Frankfurt, 1971.

Auflistung von Änderungen — "revision history"

September 2003 Arbeitsbeginn

Oktober 2003 Die Abschnitte über komplexe Zahlen und die Anmerkungen zum Funktionsbegriff werden ins Netz gestellt.

Dezember 2003/Jänner 2004 Erste Rohfassung über Differential und Integralrechnung. Inhaltlich sollten diese beiden Abschnitte OK sein, aber es fehlen noch sämtliche Abbildungen.

GNU Free Documentation License

GNU Free Documentation License
Version 1.2, November 2002

0. PREAMBLE

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The ""Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "you". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "Modified Version" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "Secondary Section" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "Invariant Sections" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "Cover Texts" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "Transparent" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "Opaque".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "Title Page" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

A section "Entitled XYZ" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "Acknowledgements", "Dedications", "Endorsements", or "History".) To "Preserve the Title" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.

C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.

D. Preserve all the copyright notices of the Document.

E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.

F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.

G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

H. Include an unaltered copy of this License.

I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.

J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.

K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.

L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.

M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.

N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.

O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties–for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warrany Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

Copyright (c) YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with...Texts." line with this:

with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.