

## 9. Übungsblatt — Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Für die Übungsteilnehmer: Abgabe nach der Vorlesung am 28. 1. 2002

1. Zum Ziehen von Stichproben:

Eine *unabhängige Zufallsstichprobe* muß folgenden zwei Bedingungen genügen:

- (1) Die  $n$  Ziehungen der Stichprobe sind unabhängig voneinander.
- (2) Bei jeder einzelnen Ziehung hat jedes Element die gleiche Chance gezogen zu werden.

Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden beiden Szenarien um unabhängige Zufallsstichproben handelt und begründen Sie Ihre Antwort:

a) Bei der Qualitätskontrolle eines Postens von 200 gleichartigen Artikeln, die in Kartons zu je 20 abgepackt sind, wird ein Karton “zufällig herausgegriffen” (= ausgelost). Sämtliche Artikel aus diesem Karton werden dann der Reihe nach geprüft.

b) Ein Marktforschungsinstitut will eine Haushaltsbefragung in einer Großstadt durchführen. Dazu werden aus dem Telefonbuch dieser Stadt 500 Haushalte “blind” ausgewählt.

2. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fußballklub sein nächstes Spiel gewinnt, sei 0.64. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Aktienmarkt steigt sei 0.52. Die Wahrscheinlichkeit, mit einer nicht gezinkten Münze Zahl zu werfen, ist 0.5. Was ist die Wahrscheinlichkeit, daß a) *alle* Ereignisse eintreten, b) *keines* der Ereignisse eintritt, c) *zumindestens eines* der Ereignisse eintritt?

3. Im Zusammenhang mit der Standardnormalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

spielt das Integral

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

eine wichtige Rolle. Dieses Integral ist nicht analytisch lösbar, es existieren aber umfangreiche Tabellierungen bzw. man kann es auf die Fehlerfunktion  $\operatorname{erf}(x) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt$  zurückführen. In der Praxis hat man aber meistens mit der (allgemeinen) Gaussverteilung

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

zum Mittelwert  $\mu$  und mit der Varianz  $\sigma^2$  zu tun. Zeigen Sie, daß (und wie!) man mit der Substitution  $y = \sigma^{-1}(x - \mu)$  die Tabellen für  $\Phi(x)$  auch für  $\tilde{f}(x)$  verwenden kann.

4. Eine (unsymmetrische) Münze liefert bei 1000 Würfeln 700mal “Zahl”. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß “Zahl” bei 10 Würfeln a) genau 5mal b) höchstens 4mal auftritt.

5. Mit jeweils demselben Volumen  $V$  einer Bakteriensuspension wurden 100 gleiche Nährböden geimpft. 17 davon bleiben steril, d.h., die entsprechende Impfflüssigkeit enthielt kein Bakterium. Man bestimme (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einem Impfvolumen  $V$  dieser Suspension a) weniger als 2 b) mindestens 5 Bakterien enthalten sind. **Anleitung:** Man benutze die Poisson-Verteilung, deren Parameter  $\lambda$  aus den angegebenen Größen zu berechnen ist.

6. Die Fläche eines Kreises berechnet sich bekanntermaßen nach  $A = \pi r^2$ . Was ist die Unsicherheit für  $A$  eines Kreises mit  $r = 10\text{cm}$ , wenn die Unsicherheit von  $r$  ( $\sigma_r$ ) 3mm beträgt?

7. Eine Größe  $x$  berechne sich aus meßbaren Größen  $u$  und  $v$  gemäß  $x = u^2 + v^2$ . Geben Sie die Beziehung zwischen der Unsicherheit von  $x$  ( $\sigma_x$ ) und den Unsicherheiten  $\sigma_u$  und  $\sigma_v$  von  $u$  und  $v$  an.

8. Die Reaktionsgeschwindigkeit einer Reaktion 1. Ordnung ( $A \rightarrow$  Produkte) gehorcht der Differentialgleichung

$$-\frac{dc_A(t)}{dt} = k c_A(t)$$

mit der Anfangsbedingung  $c_A(t = 0) = c_{A,0}$ . Die Symbole bedeuten die Konzentration der Ausgangssubstanz A,  $c_A$ , zur Zeit  $t$ . Die Substanzmenge zu Beginn des Experiments ( $t = 0$ ) ist  $c_{A,0}$ . Die für die Art der Reaktion spezifische Größe ist die Geschwindigkeitskonstante  $k$ .

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung!

(b) Die nachstehende Tabelle enthält "Meß"ergebnisse für eine solche Reaktion 1. Ordnung. Gegeben ist  $c_A$  als Funktion der Zeit (in Minuten) (die Anfangskonzentration ( $c_{A,0}$ ) beträgt 1 mol/l). Ermitteln Sie unter Verwendung von linearer (!) Regression die Geschwindigkeitskonstante.\* Überlegen Sie: Welcher Vorschritt ist nötig, um überhaupt lineare Regression anwenden zu können? Bei der Angabe des Ergebnisses bedenken Sie die Einheit von  $k$ !

$t/\text{min}$	$c_A(t)$
0	1,000
1	0,599
2	0,358
3	0,215
4	0,128
5	0,077
6	0,046
7	0,028
8	0,017
9	0,010
10	0,006

---

\*Falls Ihr Taschenrechner lineare Regression nicht unterstützt, nehmen Sie gegebenenfalls nur ein Subset der Wertetabelle, zumindestens aber 5 Datenpunkte!