6. Übungsblatt

Differentialrechnung mehrdimensionaler Funktionen

Für die Übungsteilnehmer: Abgabe nach der Vorlesung am 10. 12. 2001

1. Für folgende Funktionen $f(x,y)$ bilde man die partiellen Ableitungen f_x, f_y:

a) x/y b) $\exp(xy^2)$ c) $\tan(ax+by)$

2. Für folgende Funktionen $f(x,y)$ prüfe man die Beziehung $f_{xy} = f_{yx}$ nach:

a) $\frac{x^2}{1+y^2}$ b) $\frac{\sin x}{\cos y}$

3. Ein Anwendungsbeispiel aus der physikalischen Chemie (Thermodynamik): Für ein sogenanntes "ideales Gas" gelten die Beziehungen

$$pv = RT, \quad \frac{pv^\kappa}{\kappa - 1} = \exp[(S - S_0)/c_v]$$

mit

$$\kappa = c_p/c_v, \;\; c_p - c_v = R.$$

S_0, R, c_p, c_v und damit κ sind Konstanten. Die Symbole bedeuten: p ... Druck, v ... Volumen, R ... Gaskonstante, T ... Temperatur, S ... Entropie, die Konstante S_0 ... Entropie am absoluten Nullpunkt, c_p und c_v ... Wärmekapazität bei konstantem Druck bzw. Volumen. (N.B. c_v und c_p sind nur für ein ideales Gas Konstanten!) Drücken Sie mittels der angegebenen Beziehungen T und p als Funktionen von v und S aus, und zeigen Sie

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_v$$

Die Subskripts $()_S$ und $()_v$ bedeuten, daß in den jeweiligen partiellen Ableitungen S bzw. v konstant gehalten werden.*

4. Bestimmen Sie Minima, Maxima und Sattelpunkte.

a) $f(x,y) = 1 - x^2 - 2y^2$ b) $f(x,y) = (x^2 - y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$

5. Finden Sie die Extremstellen der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$$

Die Nebenbedingung $(g(x,y))$ ist die Gleichung einer Ellipse. Die zu minimierende Funktion $f(x,y)$ ist der Abstand zum Ursprung. Die Lösung des Problems liefert Ihnen daher die Punkte der Ellipse, die am nächsten bzw. am weitesten vom Nullpunkt entfernt sind.

Optional: Welche Ihrer Lösungen sind Maxima, welche sind Minima?

*Anmerkung: Sie werden ein wenig probieren müssen. Mehrere Wege führen zum Ziel, allerdings sind manche viel komplizierter als andere. Mein Lösungsweg beginnt mit einigen Umformungen. Die angegebenen Relationen zwischen κ, R, c_v und c_p werden erst gegen Ende hin benötigt.