5. Übungsblatt

Taylorreihen, Potenzreihen

Für die Übungsteilnehmer: Abgabe nach der Vorlesung am 3. 12. 2001

Rechnen Sie die ersten zwei Beispiele auch wenn Sie bereits in der Vorlesung vorgerechnet wurden!

1. Leiten Sie sich selbst noch einmal die Taylorreihen (oder genauer die Mac-Laurinreihen) für $\exp(x)$, $\sin(x)$ und $\cos(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ ab.

2. Mit dem Ergebnis der vorigen Aufgabe können Sie sich die "magische" Formel für das Rechnen mit komplexen Zahlen, $\exp(it) = \cos(t) + i\sin(t)$, beweisen.* Hinweis: Setzen Sie in die Reihenentwicklung für $\exp(x)$ mit $x = it$ und in die Entwicklungen für $\sin(x)$ und $\cos(x)$ mit $x = t$ ein.

3. Bestimmen Sie die Taylorpolynome (vom angegebenen Grad und an der angegebenen Stelle). Die Wahl der Methode bleibt Ihnen überlassen — Formelsammlungen können (sollen) verwendet werden. *Achtung:* Direkte Entwicklung ist in einigen Fällen (z.B. e)) mit exorbitantem Rechenaufwand verbunden; die Lösung läßt sich jedoch einfach durch Manipulation von Potenzreichen finden. Dies wird in den Übungen noch durch Beispiele gezeigt, bzw. findet sich in den Formelsammlungen meist unter dem Stichwort Potenzreihen (und nicht Taylorreihen!), im Netz z.B. Abschnitt 10.2.7.

a) $\sin x$, 5. Grad, $x = \pi/4$, b) xe^{-x}, 3. Grad, $x = 0$, c) Wie b) aber $x = -1$,
d) $1/(\cos x)^2$, 7. Grad, $x = 0$,† e) $\cos(x^2)$, 8. Grad, $x = 0$. f) $(x-1)\cos(x^2)$, 8. Grad, $x = 0$

4. Linearisieren Sie, d.h. ersetzen Sie durch das Taylorpolynom 1. Grades die folgenden Funktionen an der angegebenen Stelle.‡

a) $e^{-x^2/2}$ an der Stelle 1, b) $1/\sqrt{1+x}$ an der Stelle 0, c) $\tan x - \sin x$ an der Stelle 0,§
d) wie c), aber an der Stelle $\pi/4$.

---

*oder zumindestens plausibel machen. Zum vollem Beweis fehlt, daß nicht gezeigt wurde, daß die Taylorentwicklung auch für komplexe Funktionen gilt.

†Die Funktion ist die Ableitung einer Funktion, deren Reihenentwicklung Sie im Netz finden.

‡Linearieren ist vermutlich die häufigste Anwendung von Taylorpolynomen, die Ihnen in der Praxis unterkommen wird!

§Falls Sie Ihr Ergebnis verblüfft, berechnen Sie die Funktionswerte für 0.01, 0.05 und 0.1 — wie gut ist die Näherung?