3. Übungsblatt

Für Übungsteilnehmer: Abgabe nach der Vorlesung am 5. 11. 2001

Anwendungen von Differentiation

1. Erinnern Sie sich an die vier Funktionen g1 : $y = -x^{-3}$; g2 : $y = -x^4 - 1$; g3 : $y = -x^5$; g4 : $y = -3/x^2$ aus Beispiel 9) des 0. Übungsblatts. Bestimmen Sie (so vorhanden bzw. zutreffend) Nullstellen, Extremstellen, Wendepunkte und Definitionsbereich. (*Hinweis:* Wenn $f'(x) = f''(x) = 0$, s. Netz S. 201)

2. In der Gleichung $x(t) = -(981/2)t^2 + v_0 t + c$ beschreibt $x(t)$ (in cm) den Ort auf der vertikalen x-Achse (m. a. W., die Höhe), an dem sich ein Stein zur Zeit t (in s) befindet, der zum Zeitpunkt 0 von $x = c$ aus mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 (in $\mathrm{cm\,s^{-1}}$)senkrecht nach oben geworfen wurde. Man berechne Geschwindigkeit und Beschleunigung des Steines zu einem beliebigen Zeitpunkt t während seines Fluges. Wann erreicht er die maximale Höhe, welches ist die maximale Höhe. (Hinweis: Geschwindigkeit $v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, Beschleunigung $a(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt}$)

3. Diskutieren Sie die Eigenschaften der folgenden Funktion:

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x - 1}$$

Definitionsbereich der Funktion, Nullstellen, Lage der Extrema (Minima oder Maxima), Wert der Funktion an den Extremstellen, gibt es Wendepunkte. Sind die Extrema global oder lokal?

4. Diskutieren Sie die Eigenschaften der folgenden Familie von Funktionen:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin x \\ f_2(x) &= \sin \omega x \\ f_3(x) &= \sin(\omega x + \delta) \quad \text{mit} \quad x, \omega, \delta \in \mathbf{R}, \quad \omega \text{ und } \delta \text{ sind Konstanten} \end{aligned}$$

Definitionsbereich der Funktion, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte. Was ändert ein Vorfaktor, d.h. $\tilde{f}_1(x) = A\, f_1(x)$?

5. Diskutieren Sie (wie im vorhergehenden Beispiel) die Eigenschaften der Funktion:

$$f(x) = A\, \sin x + B\, \cos x$$

Hinweis: Die Aufgabe läßt sich am einfachsten lösen, wenn man zunächst zeigt, daß $A\, \sin x + B\, \cos x = C \sin(x + \gamma)$, mit $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ und $\gamma = \arcsin(B/\sqrt{A^2 + B^2}) = \arccos(A/\sqrt{A^2 + B^2})$ (m. a. W. C und γ sind Konstanten!).