2. Übungsblatt

Für Übungsteilnehmer: Abgabe nach der Vorlesung am 22. 10. 2001

Ein letztes Beispiel zu komplexen Zahlen

1. Gegeben ist folgender Ausdruck, der (die Zahl) a_n als Funktion von n definiert:*

$$a_n = 2 + (-\frac{i\sqrt{3}}{3}) \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{i\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Berechnen Sie zunächst a_0 und a_1.

b) Für größere n wird obiger Ausdruck rasch unbrauchbar. Dieser lässt sich jedoch unter Ausnutzung der Rechenregeln mit Potenzen deutlich vereinfachen (*ohne* an Allgemeinheit zu verlieren!).

(HINWEISE: Schreiben Sie die Gleichung zunächst als $2 + A\left[\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right]$, mit $A = \frac{i\sqrt{3}}{3}$. Berechnen Sie als nächstes die beiden $()^n$ Terme durch Umwandlung in Polarkoordinaten, und setzen Sie das Ergebnis in den Gesamtausdruck ein. Dieser läßt sich dann um einiges vereinfachen. Bei dieser Aufgabe ist es vorteilhaft, die Relation $[r(\cos\phi + i\sin\phi)]^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$ zu verwenden. Falls Sie doch mit $r\exp(i\phi)$ arbeiten, helfen bei der weiteren Vereinfachung die Relationen $\cos\phi = (e^{i\phi} + e^{-i\phi})/2$, und $\sin\phi = (e^{i\phi} - e^{-i\phi})/2i$. Bei richtiger Rechnung zeigt sich, daß unabhängig von n immer reelle Werte für a_n erhalten werden.†)

c) Unter Verwendung Ihrer Lösung von b) berechnen Sie a_7.

Differentiation

2. Differenzieren Sie die folgenden Funktionen *und* präzisieren Sie deren Definitionsbereich. Wo notwendig verwenden Sie Formelsammlungen, z.B. Netz S. 189, allg. Rechenregeln, Netz S. 195, Ableitung der elementaren Funktionen. Der Rechenweg muß jedoch immer klar ersichtlich sein!

a) $x\sqrt{1-x^2}$ b) $\dfrac{x^2}{x+\sqrt{x}}$ c) $x^3\exp(-x^2)$ d) $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ e) $(\sin x)^n, n \in \mathbf{N}$

f) $(\cos\sqrt{x})^n$ g) $\exp(\sin(x^2))$ h) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ i) $x\ln x - x$ j) $\ln(\sin x)$

3. Berechnen Sie für alle Beispiele von 2) die zweite Ableitung. Bevor Sie losrechnen, vereinfachen Sie die erste Ableitung soweit als möglich!!

---

*Dieser Ausdruck ist die Lösung einer Differenzengleichung, die das Verhalten einer Population unter bestimmten Modellvorgaben beschreibt.

†Dies ist auch logisch, denn die Größe einer Population kann wohl keine komplexe Zahl sein...