

Lösungen des 9. Übungsblatts — Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. a) Nein! Die 20 Artikel, die getestet werden, werden durch nur 1(!) Stichprobe bestimmt! b) Nein! Nicht jeder Haushalt hat ein Telefon!

2. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fußballklub sein nächstes Spiel gewinnt, sei 0.64. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Aktienmarkt steigt sei 0.52. Die Wahrscheinlichkeit, mit einer nicht gezinkten Münze Zahl zu werfen, ist 0.5.

Wir bezeichnen die drei Wahrscheinlichkeiten als $P_F = 0.64$, $P_A = 0.52$ und $P_M = 0.5$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß

a) *alle* Ereignisse eintreten ist $P_{all} = P_F \times P_A \times P_M = 0.17$ — die drei Ereignisse sind von einander *unabhängig!*

b) *keines* der Ereignisse eintritt, ist demnach $P_{none} = (1 - P_F) \times (1 - P_A) \times (1 - P_M) = 0.09$.

c) *zumindestens eines* der Ereignisse eintritt, ist $1 - P_{none} = 0.91$.

3. Ziel der Aufgabe ist es, das Integral

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

durch die Substitution $y = \sigma^{-1}(t - \mu)$ auf die Standardform

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

zu bringen.

Aus $y = \sigma^{-1}(t - \mu)$ folgt $dy = \sigma^{-1}dt$ und somit $dt = \sigma dy$. Weiters gilt für die obere Grenze des Integrals, daß x durch $\sigma^{-1}(x - \mu)$ ersetzt werden muß. Damit erhalten wir die gewünschte Umformung:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \sigma dy = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Das Beispiel zeigt, daß Integrationstechniken wie Substitution selbst dann von Nutzen sein können, wenn das resultierende Integral nicht analytisch lösbar ist.

4. Der erste wichtige Schritt in diesem Beispiel besteht darin, die Binomialverteilung als Schlüssel zur Lösung zu erkennen. Sei “Zahl” gleichbedeutend mit Erfolg, so ist die Wahrscheinlichkeit für Erfolg $p = 700/1000 = 0.7$ (und folglich $q = 1 - p = 0.3$). Aufgabe a), die Wahrscheinlichkeit bei $n = 10$ Würfeln *genau* 5mal “Zahl” zu werfen (also Erfolg zu haben), läßt sich damit durch direktes Einsetzen lösen ($n = 10, k = 5$):

$$P(5) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{10}{5} 0.7^5 0.3^5 = 0.103$$

Die Lösung von b), die Wahrscheinlichkeit bei $n = 10$ Würfeln *höchstens* 4mal “Zahl” zu werfen, findet man als $P(0) + P(1) + \dots + P(4)$, denn sowohl zehnmaliges Werfen ohne Zahl mit Wahrscheinlichkeit $P(0)$, mit einmal Zahl ($P(1)$) usw. tragen zur gesuchten Gesamtwahrscheinlichkeit bei:

$$\sum_{k=0}^4 \binom{10}{k} 0.7^k 0.3^{10-k} = \binom{10}{0} 0.7^0 0.3^{10} + \binom{10}{1} 0.7^1 0.3^9 + \dots + \binom{10}{4} 0.7^4 0.3^6 = 0.047.$$

Das Ergebnis ist sinnvoll, denn die Münze ist ja in Richtung “Zahl” gezinkt, und somit ist die Wahrscheinlichkeit bei 10maligem Werfen weniger als 5mal “Zahl” zu erhalten recht gering.

5. Die Anleitung gibt bereits vor, daß die Poissonverteilung zur Lösung dieses Beispiels zu verwenden ist. Die Schwierigkeit besteht darin, aus der Angabe den benötigten Wert für den Parameter λ (bzw. μ), d.h., die Anzahl der “Treffer” oder “Elementarereignisse” *im Mittel*, zu finden. Die Angabe sagt, daß in 100 Versuchen 17 Nährböden steril blieben. Steril bleiben heißt aber nichts anderes, als daß null Treffer erzielt wurden. Die Angabe gibt uns also die Nullwahrscheinlichkeit $P(0)$ an. Für die Poissonverteilung bedeutet das

$$P(0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = 17/100$$

und somit $\lambda = -\ln(17/100) = 1.772$.

Nachdem λ gefunden wurde, können jetzt die eigentlichen Aufgaben gelöst werden.

a) Die Wahrscheinlichkeit, daß weniger als 2 Bakterien enthalten sind berechnet sich als

$$P(0) + P(1) = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = \exp(-1.772) + 1.772 \cdot \exp(-1.772) = 0.471.$$

b) Die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 5 Bakterien enthalten sind berechnet sich als

$$P(5) + P(6) + P(7) + \dots = 1 - P(0) - P(1) - P(2) - P(3) - P(4) = 1 - e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^4}{4!}\right) = 0.034,$$

ebenfalls kein verblüffendes Ergebnis, denn die Anzahl der Bakterien im Mittel (λ) ist mit 1.772 ja deutlich unter 5.

Hinweis: Da in der Angabe ein endliches n vorkommt ($n = 100$), könnte im Prinzip auch die Binomialverteilung verwendet werden. In diesem Fall gilt $P(0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = (1-p)^{100}$ und daraus folgt $(1-p) = \sqrt[100]{17/100}$ und somit $p = 0.0176$. Um mit der Poissonverteilung zu vergleichen berechnen wir $np = 1.76 (= \lambda)$ und vergleichen mit dem oben berechneten $\lambda = 1.772$. Die Übereinstimmung ist, wie für das große n zu erwarten war, ziemlich gut!

6. Die Fläche des Kreises ist

$$A = \pi r^2 = \pi (10 \text{ cm})^2 = 314.15 \text{ cm}^2.$$

Die Unsicherheit (der Fehler) für A bei einer Unsicherheit von r von $\sigma_r = 3 \text{ mm}$ berechnet sich aus der allgemeinen Formel wie folgt:

$$\sigma_A^2 = \sigma_r^2 \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 = \sigma_r^2 (2\pi r)^2 = 4\pi^2 \sigma_r^2 r^2 = 4\pi^2 0.09 \text{ cm}^2 100 \text{ cm}^2 = 36\pi^2 \text{ cm}^4$$

und somit

$$\sigma_A = 6\pi \text{ cm}^2 = 18.85 \text{ cm}^2$$

Achtung bei derartigen Aufgaben, daß die Einheiten nicht “verloren gehen”!

7. Dieses Beispiel ist in gewisserweise eine Verallgemeinerung des vorangegangenen. Der Fehler der Funktion

$$x(u, v) = u^2 + v^2$$

berechnet sich als

$$\sigma_x^2 = \sigma_u^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \sigma_v^2 \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + 2\sigma_{uv} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right),$$

wobei der letzte Term in den meisten Fällen vernachlässigbar klein sein wird und nur dann eine Rolle spielt, wenn eine starke Korrelation zwischen u und v besteht. Ausrechnen der partiellen Ableitungen führt auf

$$\sigma_x^2 = \sigma_u^2 (2u)^2 + \sigma_v^2 (2v)^2 + 2\sigma_{uv} 2u 2v = 4\sigma_u^2 u^2 + 4\sigma_v^2 v^2 + 8\sigma_{uv} u v.$$

8. (a) Die Differentialgleichung

$$-\frac{dc_A(t)}{dt} = k c_A(t)$$

wird durch Trennung der Variablen auf

$$\frac{dc_A}{c_A} = -k dt$$

umgeformt, woraus man nach Integration

$$\ln c_A = -kt + \alpha'$$

bzw.

$$c_A = \alpha \exp(-kt)$$

erhält. Aus der Anfangsbedingung $c_A(t=0) = c_{A,0}$ folgt $\alpha = c_{A,0}$ und somit

$$c_A(t) = c_{A,0} \exp(-kt).$$

(b) Der entscheidende Schritt zur Verwendung *linearer* Regression besteht in der Verwendung der logarithmierten Form der Lösung von (a)

$$\ln c_A(t) = \ln c_{A,0} - kt = d - kt.$$

Eine Auftragung des Logarithmus der Konzentration als Funktion der Zeit ist also (von Abweichungen durch Meßfehler bzw. -ungenauigkeiten abgesehen) eine Gerade. Aus der Angabe $c_{A,0} = 1 \text{ mol/l}$ folgt weiters $d = 0$. Lineare Regression ergibt die Koeffizienten der Geradengleichung

$$y = a + bt,$$

und somit ergibt sich aus dem Vergleich mit der vorigen Gleichung, daß $d = a$ und $k = -b$.

Im folgenden eine Tabellierung der wichtigsten Zwischenergebnisse, wie sie für die Berechnung der Regressionsgeraden mit einem einfachen Taschenrechner notwendig sind.

$\sum t_i$	55,0
$\sum t_i^2$	385,0
$\sum y_i$	-28,2
$\sum y_i^2$	101,3
$\sum y_i t_i$	-197,5
$\Delta = N \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2$	1210,0
$a = \frac{1}{\Delta} (\sum t_i^2 \sum y_i - \sum t_i \sum t_i y_i)$	0,0
$b = \frac{1}{\Delta} (N \sum y_i t_i - \sum t_i \sum y_i)$	-0,513

Somit finden man eine Reaktionskonstante von $+0.513 \text{ min}^{-1}$.

Natürlich beherrschen viele Taschenrechner und Tabellenkalkulationsprogramme die Berechnung einer Ausgleichsgeraden nach Eingabe der Rohdaten in einem Schritt. Bei der Prüfung sollten aber *immer* die Zwischenschritte, die zum Endergebnis führen, analog obiger Ausarbeitung ersichtlich sein sein!!