8. Übungsblatt — Lösungen

Gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung

Bei einigen Beispielen finden sich weiterführende Hinweise bzw. allgemeinere Lösungswege als in der Vorlesung besprochen wurden. Diese ***optionalen*** Vertiefungen sind wie dieser Absatz markiert.

1. Bestimmen Sie *alle* Lösungen von $y'' + \frac{1}{2x}y' = 0$. Wir nützen das Fehlen eines Terms mit y und setzen $y' = z$, d.h., wir haben zunächst die Gleichung

$$z' + \frac{1}{2x}z = 0$$

zu lösen. Dies ist jetzt eine separierbare Gleichung 1. Ordnung, für die man als Lösung

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{2x}$$

$$\ln z = -\frac{1}{2}\ln x + \text{const}$$

$$z = \frac{\tilde{C}}{\sqrt{x}}$$

findet. Als Lösung der Originalgleichung erhält man durch nochmalige Integration ($y = \int z dx = \int y' dx$)

$$y = 2\tilde{C}\sqrt{x} + D = C\sqrt{x} + D$$

Man sieht, daß bereits bei dieser einfach(st)en Differentialgleichung zweiter Ordnung *zwei* Integrationskonstanten auftreten. Diese könnten durch Anfangsbedingungen fixiert werden.

2. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

a) $y'' + y' - 2y = 0$. Wir verwenden den Standardansatz $y = e^{\lambda x}$ und erhalten* mit $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = 0.$$

Daraus folgt ($e^{\lambda x} \neq 0$) die quadratische Bestimmungsgleichung für λ

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

mit Lösungen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Da keine Anfangsbedingungen gegeben sind, ist die allgemeine Lösung der DGL

$$y = Ae^{-2x} + Be^{x}.$$

b) $y'' - 2y' + y = 0$. Die charakteristische Lösung (Bestimmungsgleichung von λ) lautet in diesem Fall

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

und hat die zusammenfallende Lösung $\lambda = 1$. Daher (zusammenfallende Nullstelle der charakteristischen Gleichung) ist die allgemeine Lösung der DGL

$$y = Ae^{x} + Bxe^{x}.$$

Erläuternder Zusatz: Wie kommt man ohne Regel/Formelsammlung auf die zusätzliche Lösung xe^x. Wir schreiben nocheinmal die (homogene) Differentialgleichung unter Verwendung des Lösungsansatzes $y = e^{\lambda x}$ an.

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = (\lambda - 1)^2 e^{\lambda x} = 0. \qquad \text{(A)}$$

*dieser Schritt wird bei den folgenden Beispielen übersprungen.

Differenziert man (A) nach λ(!), so sieht man unschwer, daß auch die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda-1)^2 e^{\lambda x} = 2(\lambda-1)e^{\lambda x} + (\lambda-1)^2 x e^{\lambda x} \qquad \text{(B)}$$

bei $\lambda = 1$ eine Nullstelle hat. (Diese Eigenschaft folgt aus der zusammenfallenden Nullstelle, Sie können sich leicht überzeugen, daß die Ableitung nach λ an den Nullstellen der charakteristischen Gleichung in Beispiel a) *nicht* verschwindet!). Eigenschaft (B) ist aber gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(y'' - 2y' + y) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2\frac{\partial y}{\partial x} + y\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial\lambda} - 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial\lambda} + \frac{\partial y}{\partial\lambda} = 0, \quad \text{mit } y = e^{\lambda x}, \lambda = 1!$$

wobei der erste Schritt bloß im Verwenden der Leibnitz'schen Schreibweise zur Verdeutlichung der Differentiation liegt, und der zweite Schritt die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge ausnützt. Durch diese Umformung sieht man aber, daß

$$\left(\frac{\partial e^{\lambda x}}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=1} = x e^x$$

ebenfalls die DGL erfüllt und somit die gesuchte, weitere Lösung ist.

c) $y'' - 2y' + 2y = 0$. Aus der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

folgt mit $\lambda = 1 \pm i$ die allgemeine Lösung

$$y = e^x(\tilde{A}e^{ix} + \tilde{B}e^{-ix}) = e^x(A\cos x + B\sin x)$$

Erläuternder Zusatz: Als Erinnerung an das Rechnen mit komplexen Zahlen zeigen wir kurz den letzten Schritt im Detail. Wir erwarten eigentlich eine reelle Lösung der DGL. Das kann aber nur der Fall sein, wenn $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ komplex sind (A und B hingegen müssen reell sein!). Mit diesen Voraussetzungen zeigt man aber rasch

$$\tilde{A}e^{ix} + \tilde{B}e^{-ix} = \tilde{A}\cos x + i\tilde{A}\sin x + \tilde{B}\cos x - i\tilde{B}\sin x = (\tilde{A}+\tilde{B})\cos x + i(\tilde{A}-\tilde{B})\sin x = A\cos x + B\sin x$$

und somit muß $A = \tilde{A} + \tilde{B}$ und $B = i(\tilde{A} - \tilde{B})$ gelten. Diese Bedingungen sind tatsächlich wie gefordert für reelle A und B erfüllbar; durch Auflösen nach $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ findet man (2 lineare Gleichungen in zwei Variablen) $\tilde{A} = \frac{A-iB}{2}$ und $\tilde{B} = \frac{A+iB}{2}$. Im allgemeinen führt man aber nicht die Umformung wie angegeben durch, sondern schreibt bei komplexen Wurzeln die Lösung sofort in Sinus und Kosinustermen an (mal dem Exponentialfaktor natürlich). Die Anfangsbedingungen (sofern welche gegeben sind) werden üblicherweise in der reellen Form der Lösung bestimmt.

3. Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 2y' + 2y = 0$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$. Danach Kurvendiskussion der gefunden Lösung; Nullstellen, Extrema und Wendepunkte sind auf dem Intervall $0 \le x \le 2\pi$ zu bestimmen. (Hinweis: wenn Sie sich nicht verrechnet haben, sollten Sie eine Funktion erhalten, deren Kurvendiskussion als Beispiel in den Übungen bereits gerechnet wurde! Für die Bestimmung der Extrema erinnnern Sie sich an die Beziehung $A\sin x + B\cos x = C\sin(x+\gamma)$, mit $C = \sqrt{A^2+B^2}$ und $\gamma = \arcsin(B/\sqrt{A^2+B^2}) = \arccos(A/\sqrt{A^2+B^2})$ (3. Übungsblatt))

Aus der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

folgt mit $\lambda = -1 \pm i$ die allgemeine Lösung

$$y = e^{-x}(A\sin x + B\cos x)$$

Aus der ersten Anfangsbedingung, $y(0) = 1$ folgt

$$y(0) = 1 = e^0(A\underbrace{\sin 0}_{0} + B\underbrace{\cos 0}_{1}) = B \quad \Rightarrow \quad B = 1,$$

aus der zweiten Anfangsbedingung, $y(0) = -1$ folgt mit

$$y' = -e^{-x}(A \sin x + B \cos x) + e^{-x}(A \cos x - B \sin x)$$

$$y'(0) = -1 = -B + A = -1 + A \quad \Rightarrow \quad A = 0,$$

d.h., die Lösung der DGL, die den Anfangsbedingungen genügt ist

$$y = e^{-x} \cos x$$

Die Funktion ist auf $\mathbf{R}$ stetig und beliebig oft differenzierbar. Für die Kurvendiskussion benötigen wir neben der Funktion noch die erste und zweite Ableitung:

$$y' = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x = -e^{-x}(\sin x + \cos x)$$

$$y'' = e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x + e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x = 2e^{-x} \sin x$$

Für die Bestimmung von Nullstellen, Extrema und Wendepunkte vergleiche das 3. Übungsblatt (Bsp. 4 u. 5). Im folgenden jeweils die allgemeinen Lösungen, sowie die speziellen Lösungen im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$.

Nullstellen: $y = e^{-x} \cos x = 0$ ist genau an den Nullstellen des Cosinus erfüllt. Somit

$$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \ n \in \mathbf{Z}$$

Im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ liegen die Punkte mit $n = 0, \ 1$, d.h. $(\pi/2, 0)$ und $(3\pi/2, 0)$.

Extrema: Mit dem in der Angabe enthaltenen Hinweis bestimmen wir die Extremstellen durch

$$y' = -e^{-x}(\sin x + \cos x) = -\sqrt{2}e^{-x} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

Daraus folgt

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + \frac{\pi}{4} = n\pi, \ n \in \mathbf{Z},$$

d.h.

$$x = n\pi - \frac{\pi}{4}.$$

Zur Untersuchuchung ob es sich um Maxima oder Minima handelt setzen wir in die zweite Ableitung ein

$$y''(x = n\pi - \frac{\pi}{4}) = 2e^{-(n\pi - \frac{\pi}{4})} \sin(n\pi - \frac{\pi}{4}) \qquad \text{(C)}$$

Das Vorzeichen von (C) wird ausschließlich vom Vorzeichen des Sinusterms bestimmt (die Exponentialfunktion ist immer positiv). Die zweite Ableitung ist positiv für ungerade n und negativ für gerade n. Somit hat die Funktion Minima bei $x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}, \ k \in \mathbf{Z}$ und Maxima bei $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, \ k \in \mathbf{Z}$.

Im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ liegen die Punkte mit $n = 1, \ 2$, d.h. das Maximum $(7\pi/4, +e^{-7\pi/4}/\sqrt{2})$ und das Minimum $(3\pi/4, -e^{-3\pi/4}/\sqrt{2})$.

Wendepunkte: $y'' = 2e^{-x} \sin x = 0$ ist genau an den Nullstellen des Sinus erfüllt. Somit

$$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = n\pi, \ n \in \mathbf{Z}$$

Im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ liegen die Punkte mit $0 \leq n \leq 2$, d.h. $(0, 1)$, $(\pi, e^{-\pi})$ und $(2\pi, e^{-2\pi})$.

4. Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' - 2y' - 3y = 5\sin(2x)$. Dies ist eine *inhomogene* DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Analog zur Vorgangsweise bei inhomogenen DGL 1. Ordnung ist zunächst die allgemeine Lösung y_H der zugehörigen homogenen DGL ($y''_H - 2y'_H - 3y_H = 0$) zu bestimmen. Danach

sucht man durch Einsetzen der Funktion $y_P = C\cos(2x)+D\sin(2x)$ in die inhomogene DGL und Bestimmung von C und D durch Koeffizientenvergleich *eine* partikuläre Lösung y_P der inhomogenen Gleichung zu finden. Zuletzt berechnen Sie die vollständige Lösung $y(x) = y_H + y_P$, die die Anfangsbedingung $y(0) = y'(0) = 1$ erfüllt. Weitere Details und ein durchgerechnetes Beispiel zu Aufgaben dieser Art finden Sie z.B. im Netz, S. 548ff.

Wir beginnen mit der Lösung der homogenen Gleichung und finden mit

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y_H = Ae^{3x} + Be^{-x}$$

Zum Finden einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung bediendien wir uns des Ansatzes (siehe Angabe bzw. Netz)

$$y_P = C\sin 2x + D\cos 2x$$

und

$$\begin{aligned} y_P' &= 2C\cos 2x - 2D\sin 2x \\ y_P'' &= -4C\sin 2x - 4D\cos 2x \end{aligned}$$

Wir setzen dies in die inhomogene Gleichung ein

$$y_P'' - 2y_P' - 3y_P = -4C\sin 2x - 4D\cos 2x - 2(2C\cos 2x - 2D\sin 2x) - 3(C\sin 2x + D\cos 2x) = 5\sin(2x)$$

was sich zu

$$(4D - 7C)\sin 2x + (-4C - 7D)\cos 2x = 5\sin(2x)$$

vereinfachen läßt. Durch Koeffizientenvergleich (Vorfaktoren von Sinus- und Cosinusterm auf rechter und linker Seite gleichsetzen) findet man die Bestimmungsgleichungen für C und D

$$\begin{aligned} -4C - 7D &= 0 \\ -7C + 4D &= 5 \end{aligned}$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems erhält man $C = -7/13$ und $D = 4/13$. Somit ergibt sich als allgemeinste Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y = y_H + y_P = Ae^{3x} + Be^{-x} - \frac{7}{13}\sin 2x + \frac{4}{13}\cos 2x.$$

Nun müssen nur mehr die Koeffizienten A und B aus den Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 1$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} y(0) = A + B + \frac{4}{13} &= 1 \\ y'(0) = 3A - B - \frac{14}{13} &= 1 \end{aligned}$$

Nach weiterer kurzer Rechnung erhält man $A = 9/13$, $B = 0$ und damit die gesuchte Lösung die den Anfangsbedingungen genügt

$$y = \frac{9}{13}e^{3x} - \frac{7}{13}\sin 2x + \frac{4}{13}\cos 2x.$$