7. Übungsblatt — Lösungen

Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

1. a) Lösen Sie $y' = \frac{y}{1+x^2}$ mit $y(0) = 1$. Es handelt sich um eine separierbare Gleichung, daher formen wir um (erinnern Sie sich: $y' = \frac{dy}{dx}$!)

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x^2}$$

und erhalten durch Integration (Formelsammlung für das Integral auf der rechten Seite!)

$$\ln y = \arctan x + c$$

oder

$$y = C \exp[\arctan x].$$

($\exp[c] = C$, derartige Umänderungen von Integrationskonstanten werden im folgenden nicht mehr extra beschrieben.) Da $\arctan(x = 0) = 0$ folgt aus der Anfangsbedingung $y(0) = 1$, daß $C = 1$, somit ist die Lösung der DGL unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung:

$$y = \exp[\arctan x].$$

b) $y' = y^2 \cos x$, mit $y(0) = 1$. Wie in a) Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{y^2} = \cos x dx$$

(Hier sollte keine Integraltafel erforderlich sein!)

$$-\frac{1}{y} = \sin x + C$$

$$y = -\frac{1}{\sin x + C}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt

$$y(0) = 1 = -\frac{1}{\sin(0) + C} = -\frac{1}{C},$$

d.h., $C = -1$ und die Lösung der DGL die der Anfangsbedingung genügt lautet:

$$y = \frac{1}{1 - \sin x}$$

2. Lösen Sie jeweils mit der angegebenen Anfangsbedingung

a) $y' = -\frac{y}{x} + \ln x$, $y(1) = 1$. Hier ist keine Trennung der Variablen möglich, doch man sieht unschwer, daß es sich um eine inhomogene lineare DGL ($y' + p(x)y + q(x) = 0$, mit $p(x) = 1/x$ und $q(x) = -\ln x$) handelt.

1. Schritt: Lösen der homogenen Gleichung (diese ist separierbar):

$$y'_H = -\frac{y_H}{x}$$

$$\frac{dy_H}{y_H} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln y_H = -\ln x + c \quad \Rightarrow \quad y_H = \frac{C}{x}$$

2. Schritt: Finden einer partikulären Lösung durch den Ansatz $y_P = C(x)/x$. Mit $y_P' = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$ erhält man nach Einsetzen in die inhomogene DGL:

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} = -\frac{C(x)/x}{x} + \ln x$$

$$C'(x) = x \ln x$$

Integrieren ergibt:

$$C(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x^2 \ln x$$

und somit

$$y_P = -\frac{x}{4} + \frac{1}{2}x \ln x$$

Aus Schritt 1 und 2 erhalten wir somit die allgemeinste Lösung der inhomogenen DGL in der Form $y = y_H + y_P$, d.h.

$$y = \frac{C}{x} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}x \ln x$$

3. Schritt: Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(1) = 1$

$$y(1) = 1 = C - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\underbrace{\ln(1)}_{0}$$

und somit ist $C = 5/4$. Die Lösung der DGL, die der Anfangsbedingung genügt lautet:

$$y = \frac{5}{4x} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}x \ln x$$

b) $y' = x^2 - y$, $y(0) = 0$. Im folgenden nur die wichtigsten Rechenschritte — detaillierten Erläuterungen finden Sie unter 2a)

$$y' = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -dx \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-x}$$

Somit $y_P = C(x)e^{-x}$, $y_P' = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}$ und Einsetzen des Ansatzes in die inhomogene DGL:

$$C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} = x^2 - C(x)e^{-x}$$

$$C'(x) = x^2 e^x$$

$$C(x) = e^x(2 - 2x + x^2)$$

und somit $y_P = 2 - 2x + x^2$.* Die allg. Lösung der DGL ist daher

$$y = Ce^{-x} + 2 - 2x + x^2$$

Nach Einsetzen der Anfangsbedingung:

$$y(0) = 0 = C + 2$$

folgt $C = -2$.

c) $xy' - ky = x^2$ (k konstant, $k \neq 2$), $y(1) = 0$

$$y' = k\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{k}{x}dx$$

*Dies ist ein Fall, in dem Verwendung eines "empirischen" Ansatzes der Form $y_P = ax^2 + bx + c$, Einsetzen in die DGL und Koeffizientenvergleich schneller zum Ziel führt. Vor allem erspart man sich $\int dx x^2 e^x$

$$\ln y = k \ln x + c \quad \Rightarrow \quad y = Cx^k$$

Mit $y_P = C(x)x^k$ und $y_P' = C'(x)x^k + kC(x)x^{k-1}$ erhält man durch Einsetzen in die DGL:

$$C'(x)x^k + kC(x)x^{k-1} - \frac{k}{x}C(x)x^k = x$$

$$C'(x) = x^{1-k} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{x^{2-k}}{2-k}$$

Die allgemeine Lösung der DGL ist

$$y = \frac{x^2}{2-k} + Cx^k,$$

Einsetzen der Anfangsbedingung führt auf $C = 1/(k-2)$.

d) $xy' - 2y = x^2$ (d.h., wie c), aber $k = 2$), $y(1) = 0$

Lösen der homogenen Gleichung wie unter c); aus c) sieht man natürlich sofort, daß der Fall $k = 2$ gesondert behandelt werden muß.

Mit $y_P = C(x)x^2$ und $y_P' = C'(x)x^2 + 2C(x)x$ erhält man durch Einsetzen in die DGL:

$$C'(x)x^2 + 2C(x)x - \frac{2}{x}C(x)x^2 = x$$

$$C'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \ln x$$

Die allgemeine Lösung der DGL ist

$$y = x^2 \ln x + Cx^2,$$

die Anfangsbedingung führt auf $C = 0$.

e) $(x^2 - 1)y' + 2y = (x+1)^2$, $y(0) = 1$, oder mehr in Standardform ($x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$!):

$$y' + \frac{2y}{x^2-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

Homogene Gleichung:

$$y' + \frac{2y}{x^2-1} = 0$$

$$\frac{dy}{y} = +\frac{2dx}{1-x^2}$$

$$\ln y = \ln \frac{1+x}{1-x} + c^\dagger$$

$$y = C\frac{1+x}{1-x}$$

Inhomogene Gleichung: $y_P = C(x)(1+x)/(1-x)$, $y_P' = C'(x)(1+x)/(1-x) + 2C(x)/(1-x)^2$

$$C'(x)\frac{1+x}{1-x} + \frac{2C(x)}{(1-x)^2} + \frac{2}{x^2-1}C(x)\frac{1+x}{1-x} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$C'(x) = -1 \quad \Rightarrow \quad C(x) = -x$$

Somit:

$$y = (C - x)\frac{1+x}{1-x}$$

Anfangsbedingung: $y(0) = 1 = C$ und somit ist die Lösung, die den Anfangsbedingungen genügt:

$$y = (1-x)\frac{1+x}{1-x} = 1 + x$$

---

† Integraltafel!