6. Übungsblatt — Lösungen

Differentialrechnung mehrdimensionaler Funktionen

1. Für folgende Funktionen $f(x, y)$ bilde man die partiellen Ableitungen f_x, f_y:

a) $f = x/y$, $f_x = 1/y$, $f_x = -x/y^2$

b) $f = \exp(xy^2)$, $f_x = y^2 \exp(xy^2)$, $f_y = 2xy \exp(xy^2)$

c) $f = \tan(ax + by)$, $f_x = a/\cos^2(ax + by)$, $f_y = b/\cos^2(ax + by)$

2. Für folgende Funktionen $f(x, y)$ prüfe man die Beziehung $f_{xy} = f_{yx}$ nach:

a) $f = \frac{x^2}{1+y^2}$, $f_x = \frac{2x}{1+y^2}$, $f_{xy} = -\frac{4xy}{(1+y^2)^2}$, $f_y = -\frac{2x^2 y}{(1+y^2)^2}$, $f_{yx} = -\frac{4xy}{(1+y^2)^2}$

b) $f = \frac{\sin x}{\cos y}$, $f_x = \frac{\cos x}{\cos y}$, $f_{xy} = \frac{\cos x \sin y}{\cos^2 y}$, $f_y = \frac{\sin x \sin y}{\cos^2 y}$, $f_{yx} = \frac{\cos x \sin y}{\cos^2 y}$

3. 1. Schritt: Aus der zweiten Gleichung der Angabe läßt sich der Druck sofort als Funktion von Volumen und Entropie, $p = p(v, S)$, ausdrücken:

$$p = \frac{\kappa - 1}{v^\kappa} \exp[(S - S_0)/c_v]$$

2. Schritt: Aus der ersten Gleichung der Angabe erhält man zunächst

$$T = \frac{pv}{R},$$

und durch Einsetzen des im ersten Schritt gewonnenen Ausdrucks für p:

$$T = \frac{v^{1-\kappa}}{R}(\kappa - 1) \exp[(S - S_0)/c_v].$$

3. Schritt: Als nächstes bildet man die gesuchten partiellen Ableitungen (*Nochmals*: Die Subskripts $_S$ und $_v$ bezeichnen hier diejenigen Variablen, die beim partiellen Differenzieren konstant gehalten werden. Diese Notation ist vor allem in der Thermodynamik gebräuchlich!):

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_S = (1 - \kappa) v^{-\kappa} \frac{\kappa - 1}{R} \exp[(S - S_0)/c_v]$$

und

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_v = \frac{1}{c_v} v^{-\kappa} (\kappa - 1) \exp[(S - S_0)/c_v]$$

4. Schritt: Zu zeigen ist jetzt

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_v$$

Setzt man die Ausdrücke für die partiellen Ableitungen (Schritt 3) ein, erhält man:

$$(1 - \kappa) v^{-\kappa} \frac{\kappa - 1}{R} \exp[(S - S_0)/c_v] = -\frac{1}{c_v} v^{-\kappa} (\kappa - 1) \exp[(S - S_0)/c_v],$$

dies reduziert sich zu

$$\frac{\kappa - 1}{R} = \frac{1}{c_v}.$$

Mit den in der Angabe gegebenen Relationen für R, κ, c_v und c_p erhält man

$$\frac{\kappa - 1}{R} = \frac{\frac{c_p}{c_v} - 1}{c_p - c_v} = \frac{c_v - c_p}{c_v(c_p - c_v)} = \frac{1}{c_v}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. (Die Relation zwischen den zwei partiellen Ableitungen ist eine der Maxwell'schen Relationen der Thermodynamik, welche auch für nicht-ideale Systeme gilt. Sie wird normalerweise direkt als Folge des zweiten Hauptsatzes des Thermodynamik bewiesen/abgeleitet. Unser "Beweis" gilt nur für ideale Gase.)

4. Finden Sie Min., Max. und Sattelpunkter der folgenden Funktionen. Es werden die Abkürzungen $\Delta = AC - B^2$ mit $A = f_{xx}$, $B = f_{xy}$ und $C = f_{yy}$ verwendet (vgl. Netz S. 405).

a) $f(x, y) = 1 - x^2 - 2y^2$

Wir berechnen zunächst alle ersten und zweiten Ableitungen: $f_x = -2x$, $f_y = -4y$, $A = f_{xx} = -2$, $B = f_{xy} = 0$ und $C = f_{yy} = -4$ und setzen $f_x = 0$ und $f_y = 0$. Die beiden Gleichungen können gleichzeitig nur für am Punkt (0,0) erfüllt sein. Aus den (in diesem Fall!) konstanten zweiten Ableitungen findet man $\Delta > 0$, somit handelt es sich um eine Extremstelle. Wegen $A < 0$ ist (0,0) ein Maximum. Übrigens ist $f(0, 0) = 1$ auch das globales Maximum der Funktion.

b) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$

$f_x = 4x(x^2 - y^2 - 1)$, $f_y = 4y(y^2 - x^2 - 1)$, $A = f_{xx} = 12x^2 - 4y^2 - 4$, $B = f_{xy} = -8xy$ und $C = f_{yy} = -4x^2 + 12y^2 - 4$.

Die Lösung des Gleichungssystems $f_x = 0$ und $f_y = 0$ ist ein wenig komplizierter als in a). Man findet die potentiellen Extremstellen z.B. mit folgender Vorgangsweise. Die erste Gleichung, $f_x = 0$, ist erfüllt wenn $x = 0$. Mit diesem Ansetz setzen wir in $f_y = 0$ ein und erhalten $f_y(x = 0) = 4y(y^2 - 1) = 0$. Diese Gleichung ist für $y = 0$ sowie $y = \pm 1$ erfüllt. Somit haben wir drei potentielle Extremstellen: $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(0, -1)$. Weiters müssen wir mit $y = 0$ in $f_x(y = 0) = 0$ einsetzen. Daraus findet man $x = 0$ (bereits bekannt), sowie $x = \pm 1$. Daher gibt es die zwei weiteren potentiellen Extremstellen $(1, 0)$ und $(-1, 0)$. Da das Gleichungsystem $(x^2 - y^2 - 1) = 0$ (aus f_x) und $(-x^2 + y^2 - 1) = 0$ (aus f_y) keine Lösung besitzt, sind die fünf bis jetzt gefundenen Lösungen alle potentiellen Extremstellen.

Um zu entscheiden, ob es sich bei den fünf gefundenen Punkten um Extremstellen oder nicht handelt, müssen wir in die zweiten Ableitungen einsetzen:

	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(0, -1)$
f_{xx}	-4	8	8	-8	-8
f_{xy}	0	0	0	0	0
f_{yy}	-4	-8	-8	8	8
Δ	16	-64	-64	-64	-64
	Max.	S.pkt.	S.pkt.	S.pkt.	S.pkt.

D.h., nur (0,0) ist ein Extremum, und zwar ein Maximum, da $A < 0$. Das Maximum $f(0, 0) = 0$ ist nur lokal, denn z.B. $f(5, 0) = 575$.

5. Gesucht sind die Extremstellen der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$. Dieses Problem ist am besten mit der Langrange'schen Multiplikatormethode zu lösen (z.B. Netz S. 406). In unserem Fall sucht man die Extrema der Funktion

$$H(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8)$$

d.h., wir setzen die Ableitungen H_x und H_y gleich null. Zusammen mit der Gleichung für die Nebenbedingung (übrigens identisch mit $H_\lambda = 0$!) erhalten wir drei Bestimmungsgleichung in den drei Unbekannten (x, y, λ). Nach dem Bestimmen der drei Ableitungen suchen wir also die simultanen Lösungen der drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
2x - \lambda(10x - 6y) &= 0 \quad \text{(I)} \\
2y - \lambda(-6x + 10y) &= 0 \quad \text{(II)} \\
5x^2 - 6xy + 5y^2 &= 8 \quad \text{(III)}
\end{aligned}$$

Da uns hauptsächlich die (x, y) Paare, die diese drei Gleichungen erfüllen, interessieren, eliminieren wir λ, in dem wir (I) durch (II) dividieren:

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda(10x - 6y) \\ 2y &= \lambda(-6x + 10y) \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{x}{y} = \frac{10x - 6y}{-6x + 10y}$$
$$-6x^2 = -6y^2$$

woraus

$$x = \pm y$$

folgt. Mit diesen beiden Möglichkeiten setzen wir nun in (III) ein und finden für $x = y$ $x = \pm\sqrt{2}$, sowie für $x = -y$ $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ hat daher 4 Extremstellen unter Berücksichtigung der Nebenbedingung $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$: $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Setzt man mit diesen Punkten in entweder (I) oder (II) ein, so erhält man die beiden Werte für λ (1/2, 1/8).

Zur optionalen Frage: Es gibt keinen Standardtest zur Beantwortung. Aus der geometrischen Interpretation des Problems (siehe Angabe am Übungszettel) ist allerdings klar, daß es sich um Extremstellen handeln muß. Setzt man nun in $f(x, y)$ ein, so sieht man, daß es sich bei $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ um Maxima, und bei $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ um Minima handelt.