5. Übungsblatt — Lösungen

Taylorreihen, Potenzreihen

1. Leiten Sie sich selbst noch einmal die Taylorreihen (oder genauer die Mac-Laurinreihen) für $\exp(x)$, $\sin(x)$ und $\cos(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ ab.

Einsetzen in die allgemeine Formel

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \ldots$$

Es gilt $\exp(0) = 1$, $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$. Die Ableitung von $\exp(x)$ ist die Funktion selbst, damit ergibt sich

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Hier noch kurz die Vorgangsweise für den $\sin(x)$, die (analoge) Reihenentwicklung für den $\cos(x)$ bleibt wirklich als "Übungsaufgabe für den Leser". Die ersten vier Ableitungen der Sinusfunktion sind $\cos(x)$, $-\sin(x)$, $-\cos(x)$ und $\sin(x)$, mehr braucht man nicht, denn für $\sin(x)$ gilt offensichtlich $f(x) = f^{(4)}(x)$, $f'(x) = f^{(5)}(x)$ usw. Da alle Terme, die den Sinus beinhalten wegfallen ($\sin(0) = 0$), erhält man

$$\sin(x) = 0 + x \cdot 1 + \frac{x^2}{2} \cdot 0 + \frac{x^3}{3!} \cdot (-1) + \frac{x^4}{4!} \cdot 0 + \frac{x^5}{5!} \cdot 1 + \ldots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

2. Mit dem Ergebnis der der vorigen Aufgabe können Sie sich die "magische" Formel für das Rechnen mit komplexen Zahlen, $\exp(it) = \cos(t) + i\sin(t)$, beweisen.

Wir folgen dem Hinweis in der Aufgabenstellung. Durch direktes Einsetzen $x = it$ erhalten wir als linke Seite:

$$\exp(it) = 1 + it - \frac{t^2}{2} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots$$

Einsetzen der Reihen für $\sin(x)$ und $\cos(x)$ mit $x = t$ in $\cos(t) + i\sin(t)$ (rechte Seite der "magischen" Formel!) ergibt

$$\cos(t) + i\sin(t) = (1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots) + i(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots) = 1 + it - \frac{t^2}{2} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots$$

womit die Behauptung bewiesen ist.*

3. a) Mit der allgemeinen Taylorformel, den Ableitungen der Sinusfunktion und $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ findet man sofort

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + (x - \frac{\pi}{4})\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^3}{3!}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^4}{4!}\frac{\sqrt{2}}{2} + \ldots$$

Hier könnte man noch die numerischen Faktoren im Nenner ausmultiplizieren, was aus Gründen der Übersichtlichkeit unterlassen wurde. N.B. Diese Reihenentwicklung der Sinusfunktion ist der im ersten Übungsbeispiel abgeleiteten Reihe gleichwertig. Praktische Unterschiede ergeben sich allerdings, wenn die Reihen zur näherungsweisen Berechnung der Sinusfunktion verwendet werden sollen. Die Reihe aus dem ersten Beispiel ist gut für Funktionswerte nahe 0 (auch nahe π — warum?), die eben erstellte Reihe in der Nähe von $x = \pi/4$.

b) + c) Die Reihenentwicklung nahe 0 ist natürlich sofort aus der Multiplikation der Taylorreihe für e^x mit x erhältlich. Ein ähnlicher Trick für x nahe -1 existiert zwar, ist aber relativ unübersichtlich. Gleichzeitig ist die Funktion relativ einfach abzuleiten. Daher verwenden wir die Berechnung aus der Definition der Taylorreihe. (*NB: Jeder Lösungsweg, der zur gesuchten Reihe führt, ist OK!!!*)

*oder zumindest plausibel gemacht wurde.

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(0)$	$f^{(k)}(-1)$
0	$x\mathrm{e}^{-x}$	0	$-\mathrm{e}$
1	$\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$	1	$2\mathrm{e}$
2	$-2\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}$	-2	$-3\mathrm{e}$
3	$3x^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$	3	$4\mathrm{e}$

Aus obiger Tabelle findet man für b) (x nahe 0) $x\exp(-x) = x - x^2 + x^3/2\ldots$ und für c) (x nahe -1) $x\exp(-x) = -\mathrm{e} + 2\mathrm{e}(x+1) - 3\mathrm{e}(x+1)^2/2 + 2\mathrm{e}(x+1)^3/3\ldots$

d) Mit dem in der Aufgabe gegebenen Hinweis sollte es nicht zu schwer gewesen sein, die Beziehung $\frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ zu finden. Nun ist aber $\tan x = x + x^3/3 + 2x^5/(3\cdot 5) + 17x^7/(3^2\cdot 5\cdot 7) + \ldots$ (z.B. Netz 10.2.7.4(29)). Durch gliedweises Differenzieren der Reihenentwicklung für den Tangens erhält man das gesuchte Ergebnis: $1/\cos^2 x = 1 + x^2 + 2x^4/3 + 17x^6/(3^2\cdot 5) + \ldots$

e) Mit der Substitution $y = x^2$ findet man sofort $\cos x^2 = \cos y = 1 - y^2/2 + y^4/4! \pm \ldots = 1 - x^4/2 + x^8/4! \pm \ldots$

f) Unter Benutzung des Ergebnisses aus e) müssen wir nur $(x-1)\cos x^2 = (x-1)\times(1-x^4/2+x^8/4!\pm\ldots)$ vereinfachen. Ausmultiplizieren ergibt: $x - x^5/2 + x^9/4! \pm \ldots - 1 + x^4/2 - x^8/4! \pm \ldots = -1 + x + x^4/2 - x^5/2 - x^8/4!\ \ldots$

4. Linearisieren Sie, d.h. ersetzen Sie durch das Taylorpolynom 1. Grades die folgenden Funktionen an der angegebenen Stelle:

a) $e^{-x^2/2}$ an der Stelle 1. Der Funktionswert an der Stelle 1 ist $1/\sqrt{e}$, die erste Ableitung der Funktion ist $-xe^{-x^2/2}$. Somit finden wir (x nahe 1)

$$e^{-x^2/2} \approx 1/\sqrt{e} - (x-1)/\sqrt{e}$$

b) $1/\sqrt{1+x}$ an der Stelle 0. Der Funktionswert an der Stelle 0 ist 1, die erste Ableitung der Funktion ist $-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}}$, und der Funktionswert der ersten Ableitung ist $-\frac{1}{2}$. Somit finden wir (x nahe 0)

$$1/\sqrt{1+x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$$

Verwenden der ersten zwei Glieder der entsprechendenden allgemeinen Reihenentwicklung aus einer Formelsammlung (z.B. Netz 10.2.7.4(10)) führt zum selben Ergebnis und ist selbstverständlich ebenfalls legitim!

c) $\tan x - \cos x$ an der Stelle 0. Der Funktionswert an der Stelle 0 ist 0, die erste Ableitung der Funktion ist $1/(\cos x)^2 - \sin x$, und der Funktionswert der ersten Ableitung ist ebenfalls 0. Somit ist die lineare Näherung der Funktion in der Nähe von $x = 0$ gleich null.

d) An der Stelle $\pi/4$ erhält man $f(\pi/4) = 1 - \sqrt{2}/2$ und $f'(\pi/4) = 1/(\sqrt{2}/2)^2 - \sqrt{2}/2 = 2 - \sqrt{2}/2$ und somit die Näherung (x nahe $\pi/4$) $f(x) \approx 1 - \sqrt{2}/2 + (x - \pi/4)\times(2 - \sqrt{2}/2)$.

Linearisieren von Funktionen kommt relativ oft als Näherung in physikalischen oder physikalisch-chemischen Umformungen vor. Wenn z.B. "plötzlich" eine Exponentialfunktion "verschwindet", wurde sie vielleicht durch ihre Taylorreihe erster Ordnung ersetzt, da aus dem physikalischen Kontext bekannt ist, daß das Argument der Funktion klein ist. Näherungen wie in Aufgabe 4b) kommen in der Praxis ebenfalls häufig vor.