4. Übungsblatt — Lösungen

Integralrechnung für Funktionen einer Variablen

1. Man berechne den Inhalt derjenigen Fläche im rechtwinkeligen (x, y) Koordinatensystem, die nach *unten* von der Parabel $y_1 = x^2$ und nach *oben* von der Parabel $y_2 = 1 + x^2/2$ begrenzt wird.

Wir benötigen als erstes die Schnittpunkte der beiden Funktionen und setzen daher $y_1 = y_2$. Aus $x^2 = 1 + x^2/2$ erhält man $x = \pm\sqrt{2}$. Die gesuchte Fläche ist damit das bestimmte Integral

$$\int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} dx(y_2(x) - y_1(x)) = \int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} dx(1 + x^2/2 - x^2) = x - x^3/6\,\Big|_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}/3$$

2. Bestimmen Sie Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

a) Lösung durch partielle Integration ($\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)$). Strategie: Zweimaliges Anwenden von partieller Integration bis nur eine Winkelfunktion unter dem Integral übrigbleibt, daher $v(x) = x^2$, $u'(x) = \sin x$.

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x dx) = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x$$

b) Strategie: Zweimalige partielle Integration, danach taucht auf der rechten Seite wieder $F(x) = \int dx\, e^{ax} \sin bx$ auf. Linke und rechte Seite gleichsetzen und nach $F(x)$ auflösen. Die Wahl von u und v ist beliebig, z.B. $v(x) = e^{ax}$, $u'(x) = \sin bx$.

$$F(x) = \int dx e^{ax} \sin bx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx$$

$$F(x) = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b}\left(\frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \underbrace{\int e^{ax} \sin bx dx}_{F(x)}\right)$$

Daraus erhält man nach kurzer Umformung

$$F(x) = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

c) Strategie: Logarithmus ist zwar leicht zu differenzieren, aber schwer zu integrieren, daher $u(x) = \ln x$ und $v'(x) = x^{1/2}$

$$\int x^{1/2} \ln x dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{2}{3} \int \frac{1}{x} x^{3/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{2}{3}\frac{2}{3} x^{3/2} = \frac{2}{3} x^{3/2}(\ln x - \frac{2}{3})$$

d) $\int x \cdot \sqrt[3]{1 + x^2} dx$ Sei $1 + x^2 = t$, so gilt $dx = dt/2x$. Damit erhalten wir $\frac{1}{2}\int dt \sqrt[3]{t} = \frac{1}{2} t^{4/3} \frac{3}{4}$ und schließlich $\frac{3}{8}(1 + x^2)^{4/3}$

e) $\int x \exp(-x^2) dx$ Sei $x^2 = t$, so gilt $dx = dt/2x$. Damit erhalten wir $\frac{1}{2}\int \exp(-t) dt = -\frac{1}{2}\exp(-t) = -\frac{1}{2}\exp(-x^2)$.

f) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$ Sei $1 + \sin x = t$, so gilt $dx = dt/\cos x$. Damit erhalten wir $\int \frac{1}{t} dt = \ln t = \ln(1 + \sin x)$.

3. a) $\int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt{1 - x} - 1) dx^* = (\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{3}(1 - x)^{3/2} - x)\,\Big|_0^1 = \frac{2}{3}[1 - 0] - \frac{2}{3}(0 - 1) - [1 - 0] = \frac{1}{3}$

b) $\int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx\ ^\dagger = x - \frac{1}{2}\sin(2x)\,\Big|_0^\pi = [\pi - 0] - \frac{1}{2}[\sin(2\pi) - \sin(0)] = \pi$

* Für zweiten Term Substitution $1 - x = t$, $dx = -dt$,

† Für zweiten Term Substitution $2x = t$, $dx = dt/2$

c) $\int_0^\infty xe^{-x}dx = -xe^{-x}|_0^\infty - (-\int_0^\infty e^{-x}) = -xe^{-x} - e^{-x}\,|_0^\infty = e^{-x}(-x-1)\,|_0^\infty = 0 - (-1) = 1$

4. a) $\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{1}{1+t^4}dt = \frac{1}{1+x^4}$[‡] Dieses Ergebnis folgt direkt aus dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung, es ist keine weitere Manipulation / Rechnung notwendig!

b) $\frac{d}{dx}\int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{d}{dy}\int_1^y \frac{\sin t}{t}dt\frac{dy}{dx}$ (wobei $y = x^2$!) $= \frac{\sin y}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x^2}{x^2}2x = 2\frac{\sin x^2}{x}$

c) $\frac{d}{dx}\int_{-x}^x \frac{e^t-1}{t}dt = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x \frac{e^t-1}{t}dt + \int_{-x}^a \frac{e^t-1}{t}dt\right] = \frac{e^x-1}{x} - \frac{d}{dx}\int_a^{-x} \frac{e^t-1}{t}dt =$
$\frac{e^x-1}{x} - \frac{d}{dy}\int_a^y \frac{e^t-1}{t}dt\frac{dy}{dx}$ (wobei $y = -x$!) $= \frac{e^x-1}{x} - \frac{e^y-1}{y}(-1) = \frac{e^x-1}{x} - \frac{e^{-x}-1}{x} = \frac{e^x-e^{-x}}{x}$

Aus Zeitmangel (und daher *nicht* Stoff der Vorlesung / Übung!) konnten zwei wichtige Integrationsverfahren nicht behandelt werden, Integration rationaler Funktionen durch Partialbruchzerlegung sowie Auswertung von Integralen mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen, der Hyperbelfunktionen und deren Umkehrfunktionen. Für Interessierte findet sich eine gut lesbare Darstellung in Hainzl, Mathematik für Naturwissenschaftler (Teubner Studienbücher).

[‡] ... und nicht etwa $1/(1+t^4)$!