3. Übungsblatt — Lösungen

Anwendungen von Differentiation

1. a) $f(x) = -x^{-3} = -1/x^3$. Definitionsbereich: $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. $f'(x) = 3x^{-4}$, $f''(x) = -12x^{-5}$. Weder $f'(x) = 0$ noch $f''(x) = 0$ haben Lösungen, daher weder Extremstellen noch Wendepunkte.

b) $f(x) = -x^4 - 1$. Definitionsbereich: $x \in \mathbf{R}$. $f'(x) = -4x^3$, $f''(x) = -12x^2$. Nullstellen: Nur komplexe Lösungen (jedoch gutes Übungsbeispiel für die Prüfung!). Aus $f'(x) = 0$ folgt $x = 0$, jedoch ist auch $f''(x = 0) = 0$. Damit ist das Berechnen höherer Ableitungen nötig, um zwischen Extremstelle und Wendepunkt zu entscheiden. Mit $f^{(3)}(x) = -24x$ und $f^{(4)}(x) = -24$ folgt $f^{(3)}(x = 0) = 0$ und $f^{(4)}(x = 0) = -24$, somit ist $(0|-1)$ ein Maximum der Funktion (vgl. Netz S. 200f), und es gibt keinen Wendepunkt!

c) $f(x) = -x^5$. Definitionsbereich: $x \in \mathbf{R}$. $f'(x) = -5x^4$, $f''(x) = -20x^3$. Nullstelle: $x_0 = 0$. Aus $f'(x) = 0$ folgt ebenfalls $x = 0$, jedoch ist auch $f''(x = 0) = 0$. Damit ist wie in b) das Berechnen höherer Ableitungen nötig, um zwischen Extremstelle und Wendepunkt zu entscheiden. Mit $f^{(3)}(x) = -60x^2$, $f^{(4)}(x) = -120x$ und $f^{(5)}(x) = -120$ folgt $f^{(3)}(x = 0) = f^{(4)}(x = 0) = 0$, erst $f^{(5)}(x = 0) = -120 \neq 0$, somit ist $(0|0)$ ein Wendepunkt (vgl. Netz S. 200f), mit der Besonderheit einer horizontalen Tangente. Es gibt keine Extremstellen!

d)$f(x) = -3/x^2$. Definitionsbereich: $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. $f'(x) = 6x^{-3}$, $f''(x) = -18x^{-4}$. Weder $f'(x) = 0$ noch $f''(x) = 0$ haben Lösungen, daher weder Extremstellen noch Wendepunkte.

2. In der Gleichung $x(t) = -(981/2)t^2 + v_0 t + c$ beschreibt $x(t)$ (in cm) den Ort auf der vertikalen x-Achse (m. a. W., die Höhe), an dem sich ein Stein zur Zeit t (in s) befindet, der zum Zeitpunkt 0 von $x = c$ aus mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 (in cm s^{-1})senkrecht nach oben geworfen wurde. Man berechne Geschwindigkeit und Beschleunigung des Steines zu einem beliebigen Zeitpunkt t während seines Fluges. Wann erreicht er die maximale Höhe, welches ist die maximale Höhe.

Zur Lösung der Aufgabe bilden wir zunächst die erste und zweite Ableitung der Funktion $x(t)$ nach der Zeit:

$$v(t) = \dot{x}(t) = (-981\,t + v_0) \text{ cm s}^{-1} \tag{1}$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = \dot{v}(t) = -981 \text{ cm s}^{-2} \tag{2}$$

Diese Gleichungen beschreiben Geschwindigkeit und Beschleunigung des Steines zu einem beliebigen Zeitpunkt (der Wert -981 cm s^{-2} ist übrigens die Erdbeschleunigung, d.h. die Erdanziehung). Um die maximale Höhe x_{max} zu finden, müssen wir die erste Ableitung gleich 0 setzen und nach x auflösen. Dies ist in diesem Fall auch physikalisch einleuchtend, denn die Erdanziehung verlangsamt die Anfangsgeschwindigkeit v_0 des Steins mehr und mehr. Je höher der Stein fliegt, desto langsamer wird er. An dem Punkt, an dem sich die Erdanziehung "durchsetzt", hat der Stein seine maximale Höhe erreicht und hat eine Geschwindigkeit $v(t_{max}) = 0$. Einfaches Umformen von Gl. 1 ergibt t_{max}, Einsetzen von t_{max} in den Ausdruch für $x(t)$ führt zu $x(t_{max})$ ($t_{max} = v_0/981\,\text{s}$, $x(t_{max}) = v_0^2/(2 \cdot 981) + c\,\text{cm}$).

3. Die Funktion:

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x - 1}$$

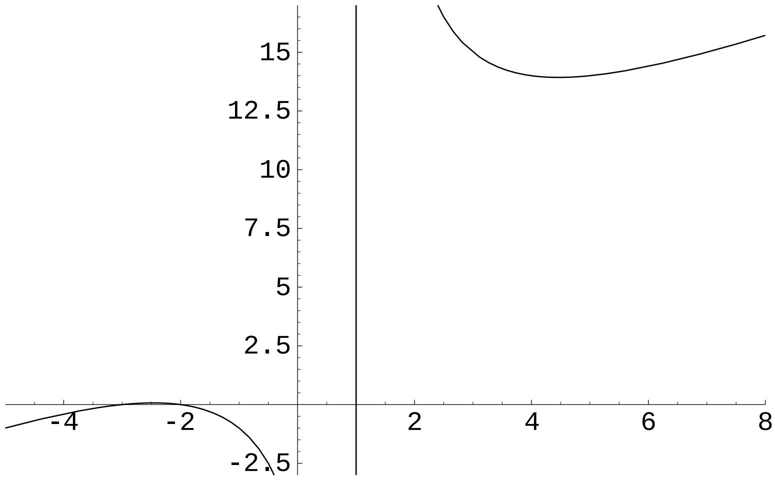
hat folgende Eigenschaften: Definitionsbereich: $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Lösen der quadratischen Gleichung im Zähler führt zu den Nullstellen, $x = \{-3, -2\}$. Zum Finden der Extrema setzen wir

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 11}{(x-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{\text{ex}} = 1 \pm 2\sqrt{3}$$

Die Werte der Funktion an diesen beiden Punkten sind $f(x_{\text{ex}}) = 7 \pm 4\sqrt{3}$. Um zu überprüfen, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, benötigen wir die zweite Ableitung:

$$f''(x) = \frac{24}{(x-1)^3}$$

Damit erhält man $f''(1+2\sqrt{3}) = 1/\sqrt{3}$, diese Lösung ist also ein Minimum, und $f''(1-2\sqrt{3}) = -1/\sqrt{3}$, d.h. ein Maximum. Für Werte $x \to 1$ geht $f(x)$ gegen $\pm\infty$, daraus folgt, daß beide Extrema nur lokal und nicht global sind. Da $f''(x)$ keine Nullstellen hat, gibt es keine Wendepunkte. Kurz noch ein Plot der Funktion (der senkrechte Strich bei $x = 1$ ist ein Artifakt des Plotprogramms):



4. Diskutieren Sie die Eigenschaften der folgenden Familie von Funktionen: Definitionsbereich: $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \sin x, \quad f_1'(x) = \cos x, \; f_1''(x) = -\sin x \\
f_2(x) &= \sin \omega x, \quad f_2'(x) = \omega \cos \omega x, \; f_2''(x) = -\omega^2 \sin \omega x \\
f_3(x) &= \sin(\omega x + \delta), \quad f_3'(x) = \omega \cos(\omega x + \delta), \; f_3''(x) = -\omega^2 \sin(\omega x + \delta)
\end{aligned}$$

Für $f_1(x)$ erhalten wir für die Nullstellen und Wendepunkte $\sin x = 0 \;\Rightarrow\; x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$. Die Extrema befinden sich bei $\cos x = 0 \;\Rightarrow\; x = (2n+1)\pi/2, n \in \mathbf{Z}$, Maxima für gerade n, Minima für ungerade n.

Für $f_2(x)$ und $f_3(x)$ ergibt sich z.B. für die Nullstellen: $\sin \omega x = 0 \;\Rightarrow\; \omega x = n\pi \;\Rightarrow\; x = n\pi/\omega$ und $\sin(\omega x + \delta) = 0 \;\Rightarrow\; \omega x + \delta = n\pi \;\Rightarrow\; x = (n\pi - \delta)/\omega$. Für die Extremstellen erhält man $x = (2n+1)\pi/2\omega$ (f_2) bzw. $\frac{(2n+1)\pi - 2\delta}{2\omega}$ (f_3).

Ein multiplikativer Vorfaktor A ändert die Lage von Nullstellen, Extremstellen und Wendepunkten nicht, wohl aber die Funktionswerte selbst um das A-fache.

5. Diskutieren Sie (wie im vorhergehenden Beispiel) die Eigenschaften der Funktion: Definitionsbereich: $x \in \mathbf{R}$

$$f(x) = A\,\sin x + B\,\cos x, \; f'(x) = A\,\cos x - B\,\sin x, \; f''(x) = -A\,\sin x - B\,\cos x$$

Die Schwierigkeit bei diesem Beispiel besteht (hoffentlich) nicht im Differenzieren, sondern im Lösen der auftretenden trigonometrischen Gleichungen. Beachten Sie jedoch, daß sich das Beispiel im wesentlichen auf $f_3(x)$ des vorhergehenden Beispiels vereinfacht, wenn man (siehe Hinweis) zeigen kann, daß $A\,\sin x + B\,\cos x = C\sin(x+\gamma)$, mit $C = \sqrt{A^2+B^2}$ und $\gamma = \arcsin(B/\sqrt{A^2+B^2}) = \arccos(A/\sqrt{A^2+B^2})$.

Die gesuchte Äquivalenz zeigt man am besten wie folgt:

$$C\sin(x+\gamma) = C[\cos\gamma \sin x + \sin\gamma \cos x] = C[\cos(\arccos \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}) \sin x + \sin(\arcsin \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}) \cos x].$$

Jetzt folgt aber mit $\sin(\arcsin(x)) = x$, $\cos(\arccos(x)) = x$ und $C = \sqrt{A^2+B^2}$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \cos x\right] = A\sin x + B\cos x$$

Von "hinten nach vorne" arbeiten / umformen hilft oft bei Ableitungen. In manchen Lehrbüchern (auch im Netz!) findet sich die gezeigte Umformung (und "Verwandte") unter der Bezeichnung *Hilfswinkelmethode zur Lösung trigonometrischer Gleichungen*.

Unter Berücksichtigen der Ergebnisse für $f_3(x)$ des vorigen Beispiels finden wir nun ganz leicht für Nullstellen und Wendepunkte $x = n\pi - \gamma$ und für die Extrema $x = \frac{(2n+1)\pi - 2\gamma}{2}$.

Gleichungen der Art $A \sin x + B \cos x = 0$ können natürlich auch durch Umformung auf $\tan x = -B/A$ gelöst werden.

Ein Verständnis der Eigenschaften von Linearkombinationen trigonometrischen Funktionen ist wichtig, weil diese oft als Lösungen einer wichtigen Klasse von Differentialgleichungen ((in)homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung) auftreten. Diese Klasse von Differentialgleichungen beschreibt Schwingungs- und Oszillationsphänomene.