2. Übungsblatt — Lösungen

Ein letztes Beispiel zu komplexen Zahlen

1. a) $a_0 = 2$, $a_1 = 3$

b) (i) Lösungsweg mit komplexer Exponentialfunktion:

$$a_n = 2 + (-\frac{i\sqrt{3}}{3})\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{i\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n =$$

$$2 + \frac{i\sqrt{3}}{3}\left[\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right] =$$

Jetzt Umwandeln in Polardarstellung (diesen Schritt müssen Sie bereits beherrschen, s. letztes Übungsblatt!)

$$2 + \frac{i\sqrt{3}}{3}\left[\left(e^{-i\pi/3}\right)^n - \left(e^{i\pi/3}\right)^n\right] =$$

$$2 + \frac{i\sqrt{3}}{3}\left[e^{-in\pi/3} - e^{in\pi/3}\right] =$$

$$2 + (-2i)\frac{i\sqrt{3}}{3}\underbrace{\left[\frac{e^{in\pi/3} - e^{-in\pi/3}}{2i}\right]}_{\sin\frac{n\pi}{3}} = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{n\pi}{3}$$

Aus der letzten Zeile ist erstens klar ersichtlich, daß (wie behauptet) alle Folgenglieder reell sind, zweitens wird die periodische Natur der Lösung klar. (Komplexe Zahlen tauchen beim Lösen von Differenzen und Differentialgleichungen immer dann auf, wenn durch die Gleichungen periodische Prozesse bzw. Schwingungsvorgänge beschrieben werden.)

b) (ii) Lösungsweg ohne komplexer Exponentialfunktion:

$$a_n = 2 + \frac{i\sqrt{3}}{3}\left[\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right] =$$

$$2 + \frac{i\sqrt{3}}{3}\left[(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3))^n - (\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))^n\right] =$$

$$2 + \frac{i\sqrt{3}}{3}\left[(\cos(\pi/3) - i\sin(\pi/3))^n - (\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))^n\right] =$$

$$2 + \frac{i\sqrt{3}}{3}\left[\cos(n\pi/3) - i\sin(-n\pi/3) - \cos(n\pi/3) - i\sin(n\pi/3)\right] =$$

$$2 + \frac{i\sqrt{3}}{3}(-2i)\sin(n\pi/3) = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{n\pi}{3}$$

c) $a_7 = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{7\pi}{3} = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{1}{2}\sqrt{3} = 3$. (NB: $\sin(7\pi/3) = \sin(\pi/3) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, Formelsammlung!) Aus der allgemeinen Lösung ersehen Sie übrigens auch, daß $a_7 = a_1$, $a_8 = a_2$ usw.

Differentiation

2. Differenzieren Sie die folgenden Funktionen *und* präzisieren Sie deren Definitionsbereich. Die folgenden Lösungen zeigen immer den ersten Schritt (Ableitung nach Produkt-, Ketten-, oder Quotientenregel) und das Endergebnis der möglichen Vereinfachungen, die mir als praktisch erscheinen. (Ausgelassene Schritte enthalten immer nur algebraische Umformungen!) Die Vereinfachungen sind aber in Hinblick auf die Berechnung der zweiten Ableitung wichtig!

a) $f(x) = x\sqrt{1-x^2} = x(1-x^2)^{1/2},\ |x| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (1-x^2)^{1/2} + x(1/2)(1-x^2)^{-1/2}(-2x) =$
$\ldots = (1-2x^2)/\sqrt{1-x^2}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x+\sqrt{x}},\ x > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x(x+\sqrt{x}) - x^2\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}}{(x+\sqrt{x})^2} = \ldots = \frac{x^2+\frac{3}{2}x\sqrt{x}}{(x+\sqrt{x})^2} = \frac{x+\frac{3}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$

c) $f(x) = x^3\exp(-x^2),\ x \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2\exp(-x^2) + x^3\exp(-x^2)(-2x) = \ldots =$
$e^{-x^2}(3x^2 - 2x^4)$

d) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x},\ x \neq (2n+1)\pi/2,\ n \in \mathbf{Z} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1/\cos^2 x$

e) $f(x) = (\sin x)^n,\ x \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n(\sin x)^{n-1}\cos x$

f) $f(x) = (\cos\sqrt{x})^n,\ x > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n(\cos\sqrt{x})^{n-1}(-\sin\sqrt{x})(1/2)x^{-1/2} = -\frac{n}{2}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}(\cos\sqrt{x})^{n-1}$

g) $f(x) = \exp(\sin(x^2)),\ x \in \mathbf{R}, \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \exp(\sin(x^2))\cos(x^2)2x = 2x\cos(x^2)\exp(\sin(x^2))$

h) $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x},\ -1 < x < 1, \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1-x}{1+x}\frac{1-x-(-1)(1+x)}{(1-x)^2} = \ldots = \frac{2}{1-x^2}$

Man kann sich das Leben auch vereinfachen, wenn man berücksichtigt, daß
$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ ist. Daraus erhält man für die erste Ableitung:
$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}(-1) = \ldots =$ wie zuvor.

i) $f(x) = x\ln x - x,\ x > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (\ln x + 1) - 1 = \ln x$

j) $f(x) = \ln(\sin x),\ 2n\pi < x < (2n+1)\pi,\ n \in \mathbf{Z}, \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sin x}\cos x = \frac{\cos x}{\sin x}$

3. Berechnen Sie die zweite Ableitung der Beispiele aus 2). Der erste gezeigte Schritt startet vom vereinfachten Resultat von 2).

a) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$
$f''(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}(-4x) - (1-2x^2)(1/2)(1-x^2)^{-1/2}(-2x)}{1-x^2} = \ldots = \frac{2x^3-3x}{(1-x^2)^{3/2}}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x+\sqrt{x}}$
$f''(x) = \frac{(1+\sqrt{x})^2(1+(3/2)(1/2)x^{-1/2}) - 2(1+\sqrt{x})(1/2)x^{-1/2}(x+(3/2)\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^4} = \ldots = \frac{1+3/\sqrt{x}}{4(1+\sqrt{x})^3}$

c) $f(x) = x^3\exp(-x^2)$
$f''(x) = e^{-x^2}(-2x)(3x^2-2x^4) + e^{-x^2}(6x-8x^3) = e^{-x^2}(6x - 14x^3 + 4x^5)$

d) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$
$f''(x) = \frac{-2\cos x(-\sin x)}{(\cos x)^4} = \frac{2\sin x}{(\cos x)^3}$

e) $f(x) = (\sin x)^n$
$f''(x) = n(n-1)(\sin x)^{n-2}(\cos x)^2 + n(\sin x)^{n-1}(-\sin x) = n(n-1)(\sin x)^{n-2}(\cos x)^2 - n(\sin x)^n$
(Hier wären noch weitere trigonometrische Vereinfachungen möglich ...)

f) $f(x) = (\cos\sqrt{x})^n$ Weiterrechnen mit Produktregel auf Dreifachprodukt! ($1/\sqrt{x} = x^{-1/2}$!)

$f''(x) = -n/2[\cos\sqrt{x}(1/2)x^{-1/2}x^{-1/2}(\cos\sqrt{x})^{n-1} + \sin\sqrt{x}(-1/2)x^{-3/2}(\cos\sqrt{x})^{n-1}+$
$+\sin\sqrt{x}x^{-1/2}(n-1)(\cos\sqrt{x})^{n-2}(-\sin\sqrt{x})(1/2)x^{-1/2}] = -\frac{n}{4x\sqrt{x}}[\sqrt{x}(\cos\sqrt{x})^n - \sin\sqrt{x}(\cos\sqrt{x})^{n-1} -$
$(n-1)\sqrt{x}(\sin\sqrt{x})^2(\cos\sqrt{x})^{n-2}]$
(Hier wären ebenfalls weitere trigonometrische Vereinfachungen möglich ...)

g) $f(x) = \exp(\sin(x^2))$
$f''(x) = \exp(\sin(x^2))\cos(x^2)2x\cos(x^2)2x + \exp(\sin(x^2))(-\sin(x^2)2x2x + \exp(\sin(x^2))\cos(x^2)(2) =$
$2\exp(\sin(x^2))[\cos(x^2) - 2x^2\sin(x^2) + 2x^2(\cos(x^2))^2]$

h) $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$
$f''(x) = \frac{-2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$

Alternativ kann man $f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$ weiterableiten: $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{-1(-1)}{(1-x)^2} = \ldots$ wie zuvor.

i) $f(x) = x\ln x - x, f''(x) = 1/x$

j) $f(x) = \ln(\sin x)$
$f''(x) = \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x\cos x}{(\sin x)^2} = -1/(\sin x)^2$ (vgl. 2d)