1. Übungsblatt — Lösungen

Rechnen mit komplexen Zahlen

1. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. a) $(5-i)(2+3i)-2i = 10-2i+15i+3-2i = 13+11i$
b) $\dfrac{1+3i}{2-i} = \dfrac{(1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{-1+7i}{5}$

2. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke und geben Sie das Ergebnis in Polarkoordinaten (Betrag und Argument der komplexen Zahl an).

a) $i^n = (i\sin(\pi/2))^n = (e^{i\pi/2})^n = e^{in\pi/2} = \cos(n\pi/2) + i\sin(n\pi/2)$ (Sie können sich leicht selbst davon überzeugen, daß dieser Ausdruck i^0, $i^1 = i$, i^2, i^3 etc. korrekt berechnet.)

b) $\dfrac{i}{1+i} = \dfrac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1}{2}(1+i) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$ da $|r| = \sqrt{1/4+1/4} = \sqrt{2}/2$ und $\tan\phi = 1 \Rightarrow \phi = \pi/4$

3. $z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = (\sqrt{a^2+b^2})^2 = |z|^2$

Für Beispiele 4) und 5) ist immer die gleiche Vorgansweise anzuwenden: Umrechnen auf Polardarstellung ($x+iy \to re^{i\phi}$), Potenzieren bzw. Radizieren, Rückrechnen auf kartesische Darstellung.

4.
$$\left[\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\right]^6 = \left[e^{i\pi/3}\right]^6 = \quad (\text{ da } \tan\phi = \sqrt{3} \Rightarrow \phi = \pi/3)$$
$$= e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

5. Finden Sie alle (!) Lösungen von

a) $z^2 = i$
$$i = i\sin(\pi/2+2n\pi) = e^{i(\pi/2+2n\pi)}, \quad n \in \mathbf{Z}$$
$$\Rightarrow z = (e^{i(\pi/2+2n\pi)})^{1/2} = e^{i(\pi/4)}e^{in\pi} = e^{i(\pi/4)}(\pm 1) = \pm e^{i(\pi/4)}$$
da $e^0 = 1, e^{i\pi} = -1$ und alle anderen Werte für n nichts Neues ergeben. Somit
$$\Rightarrow z = \pm(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = \pm\sqrt{2}/2(1+i).$$

b) $z^3 = i$
$$i = i\sin(\pi/2+2n\pi) = e^{i(\pi/2+2n\pi)}, \quad n =\in \mathbf{Z}$$
$$\Rightarrow z = (e^{i(\pi/2+2n\pi)})^{1/3} = e^{i(\pi/6)}e^{i2\pi n/3}$$
Für die drei interessanten Fälle $n = 0,\ 1,\ 2$ erhalten wir
$$z_1 = e^{i(\pi/6)} = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{i}{2},$$
$$z_2 = e^{i(\pi/6+2\pi/3)} = e^{i(5\pi/6)} = \ldots = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{i}{2},$$
$$z_3 = e^{i(\pi/6+4\pi/3)} = e^{i3\pi/2} = \ldots = -i.$$

c) $z^3 = 1+i$
$$1+i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4+2n\pi) + i\sin(\pi/4+2n\pi)) = \sqrt{2}e^{i(\pi/4+2n\pi)}, \quad n =\in \mathbf{Z}$$
$$\Rightarrow z = (\sqrt{2}e^{i(\pi/4+2n\pi)})^{1/3} = \sqrt[6]{2}e^{i(\pi/12)}e^{i2\pi n/3}$$

Für die drei interessanten Fälle $n = 0,\ 1,\ 2$ erhalten wir

$$z_1 = \sqrt[6]{2}e^{i(\pi/12)} = \sqrt[6]{2}(\cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12)) = 1.08422 + 0.290515i,$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}e^{i(\pi/12+2\pi/3)} = \sqrt[6]{2}e^{i(3\pi/4)} = \sqrt[6]{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)) = \sqrt[6]{2}(-1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2})) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(-1+i),$$

$$z_3 = \sqrt[6]{2}e^{i(\pi/12+4\pi/3)} = \sqrt[6]{2}(\cos(17\pi/12) + i\sin(17\pi/12)) = -0.290515 - 1.08422i$$

Beachten Sie: Existiert ein spezieller Winkelwert wie in z_2, so sollte er weiter vereinfacht werden. Ansonsten $(z_1,\ z_3)$ *genügt* es, die Lösungen in der Form $z_1 = \sqrt[6]{2}(\cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12))$ usw. stehenzulassen, oder eben den Taschenrechner zu bemühen.