Mathematatik für Molekularbiologen

Prüfung am 27. Februar 2012, Gruppe A

Name:	**Anzahl abgeg. Blätter:** (inkl. Angabebogen!)
Matrikelnr.:	

Alle Ergebnisse müssen am Angabebogen (= dieses Blatt) eingetragen werden!
Alle Rechenwege müssen klar nachvollziehbar sein!
Computeralgebrasysteme sind verboten!

1. Für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren. **D** bezeichne die Diagonalmatrix der Eigenwerte von **A**. Was gilt für die Spur und Determinante von **D**? Zeigen Sie dies für das gegebene Beispiel! (10 Pkt.)

2. Für $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ zeigen Sie, dass $f_{xx} + f_{yy} = 0$ (5 Pkt.)

3. Lösen Sie die Differentialgleichung. Die auftretenden Integrale sind "händisch" zu berechnen. (10 Pkt.)

$$y' + \frac{1}{3}\frac{y}{x} = x^{5/3} \cos x$$

4. Berechnen Sie die ersten 4 nichtverschwindenden Terme der Taylorreihen der folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt x_0 *aus der Definition der Taylorreihe.*

a) $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{6})$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$ (4 Pkt.)

b) $f(x) = (1 - x)^{1/3}$, $x_0 = 0$ (4 Pkt.)

c) Verwenden Sie das Ergebnis von b) und die Eigenschaften von Potenzreihen innerhalb des Konvergenzradius um die Taylorreihe von $f(x) = (1 - x)^{-2/3}$, $x_0 = 0$ zu finden. (2 Pkt.)

5. a) Die Determinante einer 4×4 Matrix $\mathbf{A}$ sei -6, d.h., $\det(\mathbf{A}) = -6$. Was ist $\det(2\,\mathbf{A})$ (1 Pkt.)

b) Sie verfügen über einen Taschenrechner, der Matrizen invertieren und multiplizieren, jedoch nicht Eigenwerte oder Eigenvektoren berechnen kann. Gegeben ist eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$, sowie n linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\ldots$, $\vec{x}_n$ von $\mathbf{A}$. Wie können Sie mit Hilfe Ihres Taschenrechners (d.h. unter Ausnützung von Matrixinversion und Matrixmultiplikation), die zu den gegebenen Eigenvektoren gehörenden Eigenwerte finden? (2 Pkt.)

c) Es sei z eine komplexe Zahl. Gesucht ist $Z = \sqrt[13]{z}$. Wie viele Lösungen gibt es? Um welchen Faktor unterscheidet sich der Polarwinkel zweier "benachbarter" Lösungen? (2 Pkt.)

Mathematatik für Molekularbiologen

Prüfung am 27. Februar 2012, Gruppe B

Name:	**Anzahl abgeg. Blätter:** (inkl. Angabebogen!)
Matrikelnr.:	

Alle Ergebnisse müssen am Angabebogen (= dieses Blatt) eingetragen werden!
Alle Rechenwege müssen klar nachvollziehbar sein!
Computeralgebrasysteme sind verboten!

1. Für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren. **D** bezeichne die Diagonalmatrix der Eigenwerte von **A**. Was gilt für die Spur und Determinante von **D**? Zeigen Sie dies für das gegebene Beispiel! (10 Pkt.)

2. Für $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 - y^2}$ zeigen Sie, dass $f_{xy} = f_{yx}$ (5 Pkt.)

3. Lösen Sie die Differentialgleichung. Die auftretenden Integrale sind "händisch" zu berechnen. (10 Pkt.)

$$y' + \frac{1}{4}\frac{y}{x} = x^{7/4} \sin x$$

4. Berechnen Sie die ersten 4 nichtverschwindenden Terme der Taylorreihen der folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt x_0 *aus der Definition der Taylorreihe.*

a) $f(x) = \cos(4x - \frac{\pi}{4})$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$ (4 Pkt.)

b) $f(x) = (1-x)^{1/4}$, $x_0 = 0$ (4 Pkt.)

c) Verwenden Sie das Ergebnis von b) und die Eigenschaften von Potenzreihen innerhalb des Konvergenzradius um die Taylorreihe von $f(x) = (1-x)^{-3/4}$, $x_0 = 0$ zu finden. (2 Pkt.)

5. a) Die Determinante einer 5×5 Matrix $\mathbf{A}$ sei -1, d.h., $\det(\mathbf{A}) = -1$. Was ist $\det(2\,\mathbf{A})$ (1 Pkt.)

b) Sie verfügen über einen Taschenrechner, der Matrizen invertieren und multiplizieren, jedoch nicht Eigenwerte oder Eigenvektoren berechnen kann. Gegeben ist eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$, sowie n linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ von $\mathbf{A}$. Wie können Sie mit Hilfe Ihres Taschenrechners (d.h. unter Ausnützung von Matrixinversion und Matrixmultiplikation), die zu den gegebenen Eigenvektoren gehörenden Eigenwerte finden? (2 Pkt.)

c) Es sei z eine komplexe Zahl. Gesucht ist $Z = \sqrt[14]{z}$. Wie viele Lösungen gibt es? Um welchen Faktor unterscheidet sich der Polarwinkel zweier "benachbarter" Lösungen? (2 Pkt.)