Mathematik für Molekularbiologen

Prüfung am 6. Februar 2012, Gruppe C

Name:	**Anzahl abgeg. Blätter:** (inkl. Angabebogen!)
Matrikelnr.:	

Alle Ergebnisse müssen am Angabebogen (= dieses Blatt) eingetragen werden!
Alle Rechenwege müssen klar nachvollziehbar sein!
Computeralgebrasysteme sind verboten!

1. Bestimmen Sie Maxima, Minima und Sattelpunkte der Funktion (10 Pkt.)

$$f(x, y) = x^2y^2 - 4xy^2 - 5x^2 + 4x$$

2. Lösen Sie folgende DGL zuerst allgemein, dann für die gegebenen Anfangsbedingungen. Als Ansatz für die partikuläre Lösung verwenden Sie $y_p = a\,x\,\sin(2x) + b\,x\,\cos(2x)$ (10 Pkt.)

$$y'' + 4y = 4\cos(2x) - 4\sin(2x) \qquad \text{AB: } y(0) = 1, \;\; y'(0) = -1$$

3. Bestimmen Sie die ersten 4 nichtverschwindenden Terme der Taylorreihen um $x_0 = 0$ der linken und rechten Seite von (5 Pkt.)

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

4. Berechnen Sie

$$z = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 =$$

Das Ergebnis ist in Polar- und kartesischen Koordinaten anzugeben. (3 Pkt.)

5. Gegeben ist

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

a) Konstruieren Sie ausgehend von $\mathbf{A}$ eine Matrix $\mathbf{A}_1$ mit $\det(\mathbf{A}_1) = 5\det(\mathbf{A})$. (1 Pkt.)

b) Analog zu a) geben Sie eine Matrix $\mathbf{A}_2$ an, in der alle Elemente $\neq 0$ sind, aber für deren Determinate $\det(\mathbf{A}_2) = \det(\mathbf{A})$ (2 Pkt.)

c) Was ist die Determinante von $3\mathbf{A}$, also $\det(3\mathbf{A})$? (1 Pkt.)

d) Was ist die Determinante der Inversen von $\mathbf{A}$, also $\det(\mathbf{A}^{-1})$? (1 Pkt.)

6. a) Berechnen Sie die Länge des komplexen Vektors $(-i,\ 1+i,\ -4+3i)$ (2 Pkt.)

b) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind dreidimensionale Vektoren (mit reellen Elementen). $\vec{b}$ und $\vec{c}$ seien weder parallel noch normal zueinander. Wie liegt $\vec{a}$ im Raum, wenn gilt (mit kurzer Begründung!): (2 Pkt.)

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$$

7. Untersuchen und (wenn möglich) berechnen Sie die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_1^\infty x^{-3/2}\,dx \qquad \int_1^\infty x^{-1/2}\,dx$$ (3 Pkt.)

Mathematatik für Molekularbiologen

Prüfung am 6. Februar 2012, Gruppe D

Name:	**Anzahl abgeg. Blätter:** (inkl. Angabebogen!)
Matrikelnr.:	

Alle Ergebnisse müssen am Angabebogen (= dieses Blatt) eingetragen werden!
Alle Rechenwege müssen klar nachvollziehbar sein!
Computeralgebrasysteme sind verboten!

1. Bestimmen Sie Maxima, Minima und Sattelpunkte der Funktion (10 Pkt.)

$$f(x,y) = 2x^2y^2 + 8xy^2 - 10x^2 - 8x$$

2. Lösen Sie folgende DGL zuerst allgemein, dann für die gegebenen Anfangsbedingungen. Als Ansatz für die partikuläre Lösung verwenden Sie $y_p = a\,x\,\sin(3x) + b\,x\,\cos(3x)$ (10 Pkt.)

$$y'' + 9y = 18\cos(3x) - 18\sin(3x) \qquad \text{AB: } y(0) = 1, \;\; y'(0) = -3$$

3. Bestimmen Sie die ersten 4 nichtverschwindenden Terme der Taylorreihen um $x_0 = 0$ der linken und rechten Seite von (5 Pkt.)

$$\cos(2x) = 1 - 2(\sin x)^2$$

4. Berechnen Sie

$$z = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 =$$

Das Ergebnis ist in Polar- und kartesischen Koordinaten anzugeben. (3 Pkt.)

5. Gegeben ist

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -12$$

a) Konstruieren Sie ausgehend von $\mathbf{A}$ eine Matrix $\mathbf{A}_1$ mit $\det(\mathbf{A}_1) = -\det(\mathbf{A})$. (1 Pkt.)

b) Analog zu a) geben Sie eine Matrix $\mathbf{A}_2$ an, in der alle Elemente $\neq 0$ sind, aber für deren Determinate $\det(\mathbf{A}_2) = \det(\mathbf{A})$ (2 Pkt.)

c) Was ist die Determinante von $2\,\mathbf{A}$, also $\det(2\mathbf{A}) =?$ (1 Pkt.)

d) Was ist die Determinante der Inversen von $\mathbf{A}$, also $\det(\mathbf{A}^{-1}) =?$ (1 Pkt.)

6. a) $\vec{a} = (i, 1+i)$, $\vec{b} = (-i, -1-i)$. Berechnen Sie $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{a}$ (2 Pkt.)

b) $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (4, 0, -2)$, $\vec{c} = (1, 1, 1)$. Zeigen Sie für diese Vektoren, dass (2 Pkt.)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}$$

7. Untersuchen und (wenn möglich) berechnen Sie die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^5}}\,dx \qquad\qquad \int_1^\infty x^{-1}\,dx$$

(3 Pkt.)