Mathematik für Molekularbiologen

Prüfung am 6. Februar 2012, Gruppe A

Name:	**Anzahl abgeg. Blätter:** (inkl. Angabebogen!)
Matrikelnr.:	

Alle Ergebnisse müssen am Angabebogen (= dieses Blatt) eingetragen werden!
Alle Rechenwege müssen klar nachvollziehbar sein!
Computeralgebrasysteme sind verboten!

1. Bestimmen Sie Maxima, Minima und Sattelpunkte der Funktion (10 Pkt.)

$$f(x, y) = (y^2 - 1)(x^2 y + x)$$

Empfehlung: $f(x, y)$ in faktorisierter Form (wie angeschrieben) differenzieren!

2. Lösen Sie folgende DGL zuerst allgemein, dann für die gegebenen Anfangsbedingungen. Als Ansatz für die partikuläre Lösung verwenden Sie $y_p = a\,\sin(2x) + b\,\cos(2x)$ (10 Pkt.)

$$y'' + 4y' + 4y = 8\cos(2x) - 8\sin(2x) \qquad \text{AB: } y(0) = 2,\ \ y'(0) = -1$$

3. Bestimmen Sie die ersten 4 nichtverschwindenden Terme der Taylorreihe folgender Funktion um $x_0 = 0$: (5 Pkt.)

$$f(x) = \frac{\big(1 + x\sin(2x)\big)}{\sqrt{1 + x^2}}$$

4. a) Berechnen Sie Determinante und Inverse der Matrix (5 Pkt.)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Ausgehend von $\mathbf{A}$, erstellen Sie eine Matrix $\mathbf{A}_1$, für deren Determinante gilt: $|\mathbf{A}_1| = -3|\mathbf{A}|$

(1 Pkt.)

c) Ausgehend von $\mathbf{A}$, erstellen Sie eine Matrix $\mathbf{A}_2$, in der alle Elemente ungleich Null sind und für deren Determinante gilt: $|\mathbf{A}_2| = |\mathbf{A}|$ (1 Pkt.)

5. Berechnen Sie

$$z = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^5 =$$

Das Ergebnis ist in Polar- und kartesischen Koordinaten anzugeben. (4 Pkt.)

6. Wahr oder falsch? Begründen Sie, wenn Sie eine Behauptung für falsch halten. *Es sind keine expliziten Rechnungen nötig!*

a) Die Determinante einer 3×3 Matrix $\mathbf{A}$ sei $|\mathbf{A}| = 2$. Es gilt $|2\,\mathbf{A}| = \det(2\,\mathbf{A}) = 16$ (1 Pkt.)

b) Für die Matrix $\mathbf{A}$ aus a) hat ein Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ keine eindeutige Lösung für $\vec{x}$

(1 Pkt.)

c) $\displaystyle\int_{+1}^{+2} x^{-4}\,dx > 0$ (1 Pkt.)

d) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{v}$ (1 Pkt.)

Mathematik für Molekularbiologen

Prüfung am 6. Februar 2012, Gruppe B

Name:	**Anzahl abgeg. Blätter:** (inkl. Angabebogen!)
Matrikelnr.:	

Alle Ergebnisse müssen am Angabebogen (= dieses Blatt) eingetragen werden!
Alle Rechenwege müssen klar nachvollziehbar sein!
Computeralgebrasysteme sind verboten!

1. Bestimmen Sie Maxima, Minima und Sattelpunkte der Funktion (10 Pkt.)

$$f(x, y) = (x^2 - 1)(xy^2 + y)$$

Empfehlung: $f(x, y)$ in faktorisierter Form (wie angeschrieben) differenzieren!

2. Lösen Sie folgende DGL zuerst allgemein, dann für die gegebenen Anfangsbedingungen. Als Ansatz für die partikuläre Lösung verwenden Sie $y_p = a\ \sin(2x) + b\ \cos(2x)$ (10 Pkt.)

$$y'' + 6y' + 9y = 22\sin(2x) + 19\cos(2x) \qquad \text{AB: } y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2$$

3. Bestimmen Sie die ersten 4 nichtverschwindenden Terme der Taylorreihe folgender Funktion um $x_0 = 0$: (5 Pkt.)

$$f(x) = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

4. a) Berechnen Sie Determinante und Inverse der Matrix (5 Pkt.)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Ausgehend von $\mathbf{A}$, erstellen Sie eine Matrix $\mathbf{A}_1$, für deren Determinante gilt: $|\mathbf{A}_1| = -2|\mathbf{A}|$

(1 Pkt.)

c) Ausgehend von $\mathbf{A}$, erstellen Sie eine Matrix $\mathbf{A}_2$, in der alle Elemente ungleich Null sind und für deren Determinante gilt: $|\mathbf{A}_2| = |\mathbf{A}|$ (1 Pkt.)

5. Berechnen Sie

$$z = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 =$$

Das Ergebnis ist in Polar- und kartesischen Koordinaten anzugeben. (4 Pkt.)

6. Wahr oder falsch? Begründen Sie, wenn Sie eine Behauptung für falsch halten. *Es sind keine expliziten Rechnungen nötig!*

a) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{v} \times \vec{u}|$ (1 Pkt.)

b) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}$ (1 Pkt.)

c) $\displaystyle\int_{-1}^{+1} x^{-4}\, dx < 0$ (1 Pkt.)

d) $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ hat genau dann eine eindeutige Lösung $\vec{x}$, wenn $|\mathbf{A}| = 0$ (1 Pkt.).