Mathematik für Molekulare Biologen (301628VO)

Prüfung am 5. Februar 2018, Gruppe A

Name/Matr.Nr.:

Alle Ergebnisse müssen am Angabebogen (= dieses Blatt) eingetragen werden! Rechenwege müssen klar nachvollziehbar sein! Keine Computeralgebrasysteme!

1. Berechnen Sie alle vierten Wurzeln

$$\left(-8 + i\,8\sqrt{3}\right)^{1/4} =$$

(Die Lösungen sind sowohl in Polar- als auch in kartesischer Darstellung anzugeben!) (8 Pkt.)

2. Lösen Sie die DGL (10 Pkt.)

$$y'' + y' - 6y = 2\cos(2x) - 10\sin(2x)$$

zunächst allgemein, dann für die Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$. Zum Finden der partikulären Lösung verwenden Sie den Ansatz $y_P = a\cos(2x) + b\sin(2x)$.

3. Gegeben ist die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sowie der Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$ sowie die Determinante der Transponierten, d.h. $\det(\mathbf{A}^T)$ (2 Pkt).

b) Bestimmen Sie die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$. (6 Pkt.)

c) Lösen Sie die Gleichung $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{d}$. (2 Pkt.)

4. Bestimmen Sie die ersten 4 Terme der Taylorentwicklung um den Punkt $x_0 = 0$ für die Funktion

$$f(x) = x\,(1 - x^2)^{1/2}$$

Verwenden Sie soweit als möglich "fertige Reihen" aus der Formelsammlung! (4 Pkt.)

5. Wahr oder falsch? Kurze Begründung der Antwort bzw. Korrektur

a) Wenn $\det(\mathbf{A}) = 1$ ($\mathbf{A}$ ist eine 6×6 Matrix!), dann ist $\det(2\,\mathbf{A}) = 64$. (2 Pkt.)

b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}\,dx = \frac{1}{2}$ (2 Pkt.)

c) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ sind Vektoren im Raum. $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. $\vec{d}$ liegt *parallel* zu $\vec{a}$ ($\vec{d} = \lambda\vec{a}$) Es gilt $\vec{a} \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c}$. (2 Pkt.)

d) Die (komplexen) Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$ stellen geometrisch die Eckpunkte eines Quadrats dar. (2 Pkt.)

Mathematik für Molekulare Biologen (301628VO)

Prüfung am 5. Februar 2018, Gruppe B

Name/Matr.Nr.:
Alle Ergebnisse müssen am Angabebogen (= dieses Blatt) eingetragen werden! Rechenwege müssen klar nachvollziehbar sein! Keine Computeralgebrasysteme!

1. Berechnen Sie alle vierten Wurzeln

$$\left(-8 - \mathrm{i}\, 8\sqrt{3}\right)^{1/4} =$$

(Die Lösungen sind sowohl in Polar- <u>als auch</u> in kartesischer Darstellung anzugeben!) (8 Pkt.)

2. Lösen Sie die DGL (10 Pkt.)

$$y'' - y' - 6y = -10\sin(2x) - 2\cos(2x)$$

zunächst allgemein, dann für die Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$. Zum Finden der partikulären Lösung verwenden Sie den Ansatz $y_P = a\cos(2x) + b\sin(2x)$.

3. Gegeben ist die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sowie der Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$ sowie die Determinante der Transponierten, d.h. $\det(\mathbf{A}^T)$ (2 Pkt).

b) Bestimmen Sie die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$. (6 Pkt.)

c) Lösen Sie die Gleichung $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{d}$. (2 Pkt.)

4. Bestimmen Sie die ersten 4 Terme der Taylorentwicklung um den Punkt $x_0 = 0$ für die Funktion

$$f(x) = x\,(1 + x^2)^{-1/2}$$

Verwenden Sie soweit als möglich "fertige Reihen" aus der Formelsammlung! (4 Pkt.)

5. <u>Wahr oder falsch?</u> Kurze Begründung der Antwort bzw. Korrektur

a) Wenn $\det(\mathbf{A}) = 5$ ($\mathbf{A}$ ist eine 4×4 Matrix!), dann ist $\det(2\,\mathbf{A}) = 10$. (2 Pkt.)

b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{3}{2}$ (2 Pkt.)

c) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ sind Vektoren im Raum. $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. $\vec{d}$ ist zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ *weder parallel noch normal.* Es gilt $\vec{a} \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{d}$. (2 Pkt.)

6. Die Berechnung $\sqrt[5]{2^5\,i}$ ($i = \sqrt{-1}$) kann zur Bestimmung der Koordinaten eines regelmäßigen Fünfecks verwendet werden. Skizzieren/erklären Sie, warum! (Die Wurzeln sind nicht explizit zu berechnen!! *Überlegen Sie: Wie viele Wurzeln gibt es? Worin unterscheiden sie sich?*) (2 Pkt.)