Rechnen mit Matrizen und Determinanten

- Was versteht man unter der transponierten Matrix, der adjungierten Matrix? Illustrieren Sie durch ein Beispiel!

- Was versteht man unter einer symmetrischen, einer antisymmetrischen, einer hermiteschen und einer antihermiteschen Matrix? Geben Sie einfache Beispiele an.

- Erinnern Sie sich an die Definition der Spur (Summe der Elemente der Hauptdiagonalelemente einer quadratischen Matrix). Überlegen Sie sich, daß die Spur einer antisymmetrischen Matrix gleich Null, und die Spur einer antihermiteschen Matrix immer rein imaginär ist!

- Es sei $\mathbf{A}$ eine allgemeine quadratische Matrix mit reellen Elementen (d.h. ohne weitere besondere Eigenschaften). Man kann jedoch jede derartige Matrix als Summe einer symmetrischen Matrix $\mathbf{A}^s$ und antisymmetrischen Matrix $\mathbf{A}^a$ darstellen, d.h.,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^s + \mathbf{A}^a$$

  Überlegen Sie sich, wie man $\mathbf{A}^s$ und $\mathbf{A}^a$ finden kann. Starten Sie eventuell mit einem konkreten 2×2 und 3×3 Fall.

- Reihenreduktion und Wert der Determinante. Es sei $\mathbf{A}$ eine allgemeine quadratische Matrix mit einer Determinanten ungleich Null, d.h., $|\mathbf{A}| = a \neq 0$. Um $\mathbf{A}$ einer Reihenreduktion zu unterwerfen, können Sie (i) eine Reihe von $\mathbf{A}$ mit einem Faktor multiplizieren, (ii) zwei Reihen von $\mathbf{A}$ vertauschen, und (iii) zu einer Reihe von $\mathbf{A}$ das Vielfache einer anderen Reihe hinzuaddieren (wegzählen). *Wie ändern Operationen (i)–(iii) den Wert der Determinanten?*

- Es ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 7 & 8 & -2 & -3 \\ -5 & 6 & 11 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad |\mathbf{A}| = -702$$

  Das brauchen Sie nicht nachrechnen!!. Verwenden Sie diese Information sowie die Eigenschaften von Determinanten um die Determinanten folgender von $\mathbf{A}$ "abgeleiteter" Matrizen zu berechen:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & -2 & -3 \\ -5 & 6 & 11 & -3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 8 & 7 & -2 & -3 \\ 6 & -5 & 11 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 1 \\ -2 & -10 & 4 & -2 \\ 7 & 8 & -2 & -3 \\ -5 & 6 & 11 & -3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & -2 & -3 \\ -5 & 11 & 11 & -3 \end{pmatrix}$$

  Überlegen Sie sich mind. eine weitere "nicht-triviale" von $\mathbf{A}$ abgeleitete Matrix, deren Determinante sich analog einfach bestimmen läßt. Was ist die Determinante der Inversen von $\mathbf{A}$, d.h., $|\mathbf{A}^{-1}|$