Rechnen mit komplexen Zahlen

1. Es sei $z_1 = a + b\,i$, $z_2 = c + d\,i$. Ist es sinnvoll zu fragen, ob z.B. $z_1 > z_2$ ist? Denken Sie z.B. an den Fall $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = -5 - 3i$. Verwenden Sie die graphische Darstellung in der Zahlenebene, um Ihre Antwort zu begründen.

2. In Anschluss an die vorhergegangene Frage illustrieren Sie nochmals die Bedeutung von $|z|$. Wie viele komplexe Zahlen haben denselben Betrag? (Wie viele reelle Zahlen haben denselben Betrag?)

3. Geben Sie je ein Beispiel einer komplexen Zahl an, deren Polarwinkel im I., II.,, III. bzw. IV. Quadranten liegt. Welches Vorzeichen haben $\sin\varphi$ sowie $\cos\varphi$ in den vier Quadranten?

4. Für welche komplexen Zahlen können Sie die Formel $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$ (selbst wenn Sie ggf. $+\pi$ addieren) *nicht* verwenden? Denken Sie z.B. an $z = i$.

5. Zur Erinnerung: Für komplexe Zahlen $z_1 = a+b\,i$, $z_2 = c+d\,i$ usw. gelten die ganz normalen Rechenregeln. Z.B. geht man für $(a + b\,i)\cdot(c + d\,i)$ genauso vor, wie man es für $(a + b\,x)\cdot(c + d\,x)$ machen würde (x ist eine reelle Variable (Unbekannte)), d.h.,
$$(a + b\,x)\cdot(c + d\,x) = a\,c + b\,c\,x + a\,d\,x + b\,d\,x^2 \qquad \text{(I)}$$
$$(a + b\,i)\cdot(c + d\,i) = a\,c + b\,c\,i + a\,d\,i + b\,d\,i^2 \qquad \text{(II)}$$
Im Fall (I) fassen Sie als nächstes Terme nach Potenzen von x zusammen, und erhalten das "kanonische" Ergebnis $(a + b\,x)\cdot(c + d\,x) = a\,c + (b\,c + a\,d)x + b\,d\,x^2$. Analog dazu erhalten Sie im Fall (II) $(a + b\,i)\cdot(c + d\,i) = a\,c + (b\,c + a\,d)i + b\,d\,i^2$, nur dass Sie jetzt i^2 zu -1 vereinfachen können (und sollen!) und somit auf $(a + b\,i)\cdot(c + d\,i) = a\,c - b\,d + (b\,c + a\,d)i$ kommen.

   Um das zu illustrieren eine Aufgabe: Verwenden Sie die (hoffentlich bekannte) Formel $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ um $(3 - 2i)^3$ zu berechnen und machen Sie die Probe durch direktes Ausmultiplizieren.

6. Illustrieren Sie Addition bzw. Subtraktion zweier komplexer Zahlen in der Zahlenebene. Können Sie graphisch zeigen, warum $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$? Wann gilt das Gleichheitszeichen? Eine analoge Beziehung gilt für die Summe beliebig vieler komplexer Zahlen.

7. Für komplexe Zahlen $z_1 = a+b\,i = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = c+d\,i = r_2e^{i\varphi_2}$ überlegen Sie sich, was $z_1\cdot z_2$ bzw. z_1/z_2 für Betrag und Polarwinkel des Ergebnisses bedeuten.

8. Für $Z = R\,e^{i\Phi} = z^m$, $z = r\,e^{i\varphi}$ drücken Sie R und Φ durch r und φ aus. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch!

9. Kann man in der Polardarstellung addieren und subtrahieren?

10. Bonusfrage: Wie kann Ihnen Rechnen mit komplexen Zahlen beim Zeichnen eines gleichseitigen 29-Ecks helfen?