Funktionen III — Integration

1. Startpunkt für die folgenden Überlegungen ist eine auf $a \leq x \leq b$ stetige Funktion $f(x)$. Wir unterteilen das Interval $[a, b]$ in n gleiche Teilstücke der Länge $\Delta x = (b-a)/n$, und setzen $a = x_0$, $b = x_n$. Das erste Teilstück geht also von $x_0 = a$ bis x_1, das zweite von x_1 bis x_2, das letzte von x_{n-1} bis $x_n = b$. Wir betrachten die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

(manchmal Riemannsumme genannt). Hierbei bezeichnet x_i^* (bzw. $f(x_i^*)$) einen Punkt aus dem i-ten Teilstück, $x_{i-1} \leq x_i^* \leq x_i$ (bzw. den Wert der Funktion an diesem Punkt).

   - Machen Sie sich eine Skizze und stellen Sie sicher, dass Sie die Notation verstehen.
   - Es sei auf dem Interval $[a, b]$ $f(x) \geq 0$. Was ist in diesem Fall die geometrische Interpretation der Riemannsumme.
   - Wie sieht es aus, wenn $f(x)$ positive und negative Werte annimmt?

2. Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen Riemannsumme und bestimmtem Integral $\int_a^b f(x)dx$.

   - Was ist die geometrische Interpretation von $\int_a^b f(x)dx$ wenn $f(x) \geq 0$?
   - Was ist die geometrische Interpretation wenn $f(x)$ positive und negative Werte annimmt?

3. Wahr oder falsch?

   - Zu jeder stetigen Funktion existiert eine Ableitungsfunktion.
   - Zu jeder stetigen Funktion existiert die Stammfunktion.
   - $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \left(x^5 - 6x^9 + \frac{\sin x}{(1+x^4)^2} \right) dx = 0$
   - $\displaystyle\int_{-5}^{+5} (ax^2 + c)dx = 2\int_{0}^{+5} (ax^2 + c)dx$
   - $\displaystyle\int_{0}^{2} (x - x^3)dx$ repräsentiert die Fläche unter der Kurve $y = x - x^3$ von 0 bis 2.
   - Wenn f' auf $[1, 3]$ stetig ist, so gilt $\displaystyle\int_{1}^{3} f'(v)dv = f(3) - f(1)$.

4. Warum sind die folgenden Integrale uneigentlich? Pruefen Sie in jedem Fall die Existenz.

   a) $\displaystyle\int_{-1}^{+2} x^{-3}dx$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{+2} x^{-2/3}dx$ c) $\displaystyle\int_{-1}^{+2} \frac{1}{x^\alpha}dx$

   d) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x^{-3}dx$ e) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x^{-1/2}dx$ f) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x^\alpha dx$

   In c) und f) untersuchen Sie die Rolle von α.