Rechnen mit Vektoren

Stefan Boresch

Department of Computational Biological Chemistry
Faculty of Chemistry
University of Vienna

December 15, 2008

Copyright (c) 2008 Stefan Boresch

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

Vektoren

Wir haben uns bereits mit Funktionen mehrerer Veränderlicher beschäftigt. Eine bestimmte Eigenschaft hängt von mehreren Größen ab, welche von einander unabhängig sind. Mit geeigneten Apparaturen kann ich z.B. Druck und Temperatur eines Gases getrennt kontrollieren, das Volumen des Gases ist eine Funktion dieser beiden Größen (plus natürlich der Molmenge des vorhandenen Gases!).

Das Volumen eines Gases kann durch eine Zahl beschrieben werden, der Wert dieser Zahl hängt von mehreren anderen Eigenschaften ab. Es gibt jedoch auch Eigenschaften, die sich nicht durch eine Zahl alleine ausdrücken lassen. Die Angabe "Ein Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 25 km/h" allein ist nicht sehr aussagekräftig, denn wir wissen nicht "wohin" dieses Auto fährt. Derartige Überlegungen führen auf den Begriff des *Vektors*. Ein Vektor ist charakterisiert durch

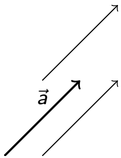
- Länge (*Betrag*)
- Richtung
- Richtungssinn (Orientierung)

Bezogen auf das "Autobeispiel" bedeuten diese drei Punkte: (1) Die Länge / Betrag sind die 25 km/h. Die Richtung würde z.B. heissen auf einer Geraden zwischen Wien und Salzburg, während Richtungssinn (Orientierung) bedeutet, ob von Wien nach Salzburg oder von Salzburg nach Wien.

Grundeigenschaften von Vektoren

Um zu verdeutlichen, daß es sich bei einer Größe a um einen Vektor handelt, schreibt man $\vec{a}$. In Büchern wird stattdessen häufig Fettdruck genommen, d.h., $\mathbf{a}$. Manchen Leuten ist der Pfeil zu "mühsam", daher schreiben sie $\underline{a}$. Vor allem die ältere, deutschsprachige Literatur verwendet Frakturschrift $\mathfrak{a}$.

Vektoren werden üblicherweise durch Pfeile dargestellt. Beachten Sie bitte, daß wie gezeigt eine Parallelverschiebung einen Vektor nicht ändert, alle gezeigten Pfeile sind daher Darstellungen des Vektors $\vec{a}$



Grundeigenschaften von Vektoren II

Wir wollen jetzt einige Grundeigenschaften von Vektoren besprechen.

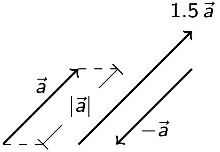
- Ein wichtiges Charakteristikum eines Vektors ist sein *Betrag*. Im zwei- und dreidimensionalen Raum entspricht der Betrag eines Vektors der Länge des Vektors (anschaulich also der Länge des Pfeils, die den Vektor repräsentiert). Wir schreiben für Länge / Betrag von $\vec{a}$ unter Verwendung des Betragszeichen $|\vec{a}|$. Man schreibt auch

$$|\vec{a}| = a$$

- Unter Verwendung des Längenbegriffs können wir jetzt die *skalare Multiplikation* einführen (Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar (einer Zahl) λ): $\lambda\,\vec{a}$. Diese läßt die Richtung unverändert, ändert aber die Länge des Vektors um den Faktor λ, d.h., für die Länge von $\vec{a}$ gilt:

$$|\lambda\,\vec{a}| = \lambda\,|\vec{a}| = \lambda\,a$$

- *Multiplikation mit einer negativen Zahl* ändert den *Richtungssinn* des Vektors; insbesondere entspricht $-\vec{a} = (-1)\,\vec{a}$ einem Vektor mit derselben Länge und Richtung wie $\vec{a}$, aber gegengleichem Richtungssinn (Orientierung)



Grundeigenschaften von Vektoren III

- *Einheitsvektor:* Die drei Grundcharakteristika eines Vektors (Betrag, Richtung, Richtungssinn) können in zwei Untergruppen getrennt werden, Betrag einerseits, Richtung und Richtungssinn andererseits (die Unterscheidung zwischen letzeren ist ja zumind. in der Umgangssprache etwas unscharf). Manchmal ist es nützlich zwischen Betrag einerseits und Richtung + Richtungssinn andererseits zu trennen. Dies erreicht man durch

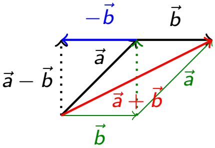
$$\vec{a} = |\vec{a}| \; \vec{a}^{\circ}$$

d.h., der Vektor wird als skalares Produkt seiner Länge mit seinem Einheitsvektor $\vec{a}^{\circ}$ ausgedrückt. Ein Einheitsvektor $\vec{a}^{\circ}$ hat die Länge 1, besitzt aber die gleiche Richtung und Orientierung (=Richtungssinn) wie $\vec{a}$. Aus einem beliebigen Vektor $\vec{a}$ bekommt man einen Einheitsvektor durch

$$\vec{a}^{\circ} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

Addition, Subtraktion

Die Addition zweier Vektoren kann man sich als "geometrische Addition gerichteter Strecken" vorstellen.



Die Addition ist

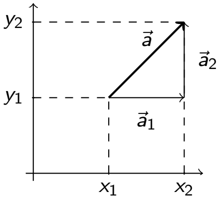
- kommutativ: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- assoziativ: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
- distributiv bezüglich der skalaren Multiplikation

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\,\vec{a}+\lambda\,\vec{b}\quad \text{bzw.}$$

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\,\vec{a}+\mu\,\vec{a}\quad (\lambda,\mu\in\mathbb{R})$$

Die Subtraktion $\vec{a}-\vec{b}$ ergibt sich wie gezeigt durch *Addition* von $-\vec{b}$ zu $\vec{a}$. Alternativ erhält man den Differenzvektor (grüner, gepunkteter Pfeil) indem man $\vec{b}$ in den Ausgangspunkt von $\vec{a}$ parallel verschiebt und einen Vektor von dieser Pfeilspitze zur Pfeilspitze von $\vec{a}$ verbindet bildet.

Darstellung in vektoriellen Komponenten



Wir gehen jetzt zur Darstellung von Vektoren in rechtwinkeligen Koordinatensytemen über (siehe obige Darstellung für 2D). Wenn nicht speziell vermerkt, operieren wir mit einem Rechtssystem (Erklärung in Kürze!). Wie gezeigt, wurde der Vektor $\vec{a}$ in zwei Komponenten $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ zerlegt, die parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Es gilt

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

$$|\vec{a}_1| = a_1 = x_2 - x_1, \qquad |\vec{a}_2| = a_2 = y_2 - y_1$$

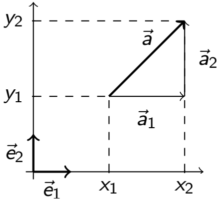
$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Für den dreidimensionalen Raum gilt eine analoge Zerlegung

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3,$$

wobei sich die $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ wieder als parallel zu den Koordinatenachsen x, y, z verstehen.

Basisvektoren



Die Abbildung der Vorseite ist jetzt um die zwei Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ erweitert, Einheitsvektoren (Länge $= 1$) parallel zu den beiden Koordinatenachsen. Derartige Vektoren werden als *Basisvektoren* (Grundvektoren) bezeichnet. Weiters gilt

$$\vec{a}_1 = |\vec{a}_1|\,\vec{e}_1 = a_1\vec{e}_1 \qquad \vec{a}_2 = |\vec{a}_2|\,\vec{e}_2 = a_2\vec{e}_2$$

und somit aber auch

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$$

Da aber in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem kein Zweifel über die Natur der Einheitsvektoren besteht, ist ein Vektor $\vec{a}$ durch die *Komponenten* a_1, a_2 eindeutig bestimmt, und man schreibt

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Basisvektoren II

Die Darstellung eines Vektors

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{(in 2D)} \qquad \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{(in 3D)}$$

wird als Komponentendarstellung von $\vec{a}$ bezeichnet. Die Basisvektoren haben Komponenten

$$\vec{e}_1 = (1, 0), \; \vec{e}_2 = (0, 1) \quad \text{(in 2D)}$$

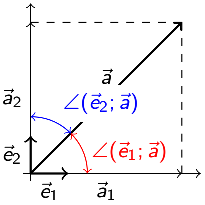
$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \; \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \; \vec{e}_3 = (0, 0, 1) \quad \text{(in 3D)}$$

Aus den gegebenen Definition folgen unmittelbar die Rechenregeln für skalare Multiplikation und (vektorielle) Addition in Komponentendarstellung (auf den "Beweis" wird verzichtet):

$$\lambda \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, a_1 \\ \lambda\, a_2 \\ \lambda\, a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Einschub: Richtungskosinus eines Vektors



Die Größen

$$\cos[\angle(\vec{e}_1, \vec{a})] = \frac{a_1}{|\vec{a}|} \qquad \cos[\angle(\vec{e}_2, \vec{a})] = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

heißen Richtungskosinus des Vektors $\vec{a}$. Dabei sind die Winkel immer so zu messen, daß sie zwischen 0 und 180° liegen. Durch die Angabe der zwei (drei) Richtungskosinus (2D bzw. 3D) sind Richtung und Orientierung eines Vektors $\vec{a}$ festgelegt. Für die Richungskosinus gelten folgende Beziehungen (gezeigt für 2D, analog in 3D):

$$\cos^2[\angle(\vec{e}_1, \vec{a})] + \cos^2[\angle(\vec{e}_2, \vec{a})] = \frac{a_1^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_2^2}{|\vec{a}|^2} = 1$$

sowie

$$a_1 \cos[\angle(\vec{e}_1, \vec{a})] + a_2 \cos[\angle(\vec{e}_2, \vec{a})] = \frac{a_1^2 + a_2^2}{|\vec{a}|} = |\vec{a}|$$

Weiters lassen sich die Komponenten eines Vektors via Richtungskosinus ausdrücken:

$$a_1 = |\vec{a}| \cos[\angle(\vec{e}_1, \vec{a})] \qquad a_2 = |\vec{a}| \cos[\angle(\vec{e}_2, \vec{a})]$$

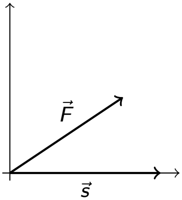
Skalarprodukt

In der Praxis haben sich zwei(!) Produkte zwischen zwei Vektoren als nützlich erwiesen. Beide sind letztlich aus Anwendungen der Physik motiviert. Als erstes beschäftigen wir uns mit dem *Skalarprodukt* (auch *inneres* Produktgenannt)

Ausgangspunkt ist die an einem Körper geleistete Arbeit, die salopp als

$$\text{Arbeit W} = \text{Kraft } \left|\vec{F}\right| \text{ mal Weg } |\vec{s}|$$

definiert ist. Dies gilt aber in dieser Form nur, wenn die Richtung und Orientierung von Kraft und Weg übereinstimmen. Betrachten wir den allgemeineren Fall



Der Körper/Massenpunkt könne sich nur in Richtung von $\vec{s}$ bewegen.

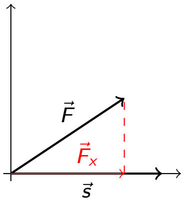
Skalarprodukt

In der Praxis haben sich zwei(!) Produkte zwischen zwei Vektoren als nützlich erwiesen. Beide sind letztlich aus Anwendungen der Physik motiviert. Als erstes beschäftigen wir uns mit dem *Skalarprodukt* (auch *inneres* Produktgenannt)

Ausgangspunkt ist die an einem Körper geleistete Arbeit, die salopp als

$$\text{Arbeit W} = \text{Kraft } \left|\vec{F}\right| \text{ mal Weg } |\vec{s}|$$

definiert ist. Dies gilt aber in dieser Form nur, wenn die Richtung und Orientierung von Kraft und Weg übereinstimmen. Betrachten wir den allgemeineren Fall



Der Körper/Massenpunkt könne sich nur in Richtung von $\vec{s}$ bewegen. Für die Arbeit (die an diesem Körper geleistet wird) ist daher nur die Kraftkomponente $\vec{F}_x$, die parallel zu $\vec{s}$ liegt, von Bedeutung.

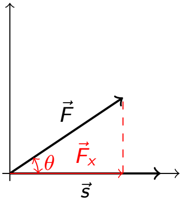
Skalarprodukt

In der Praxis haben sich zwei(!) Produkte zwischen zwei Vektoren als nützlich erwiesen. Beide sind letztlich aus Anwendungen der Physik motiviert. Als erstes beschäftigen wir uns mit dem *Skalarprodukt* (auch *inneres* Produktgenannt)

Ausgangspunkt ist die an einem Körper geleistete Arbeit, die salopp als

$$\text{Arbeit W} = \text{Kraft } \left|\vec{F}\right| \text{ mal Weg } |\vec{s}|$$

definiert ist. Dies gilt aber in dieser Form nur, wenn die Richtung und Orientierung von Kraft und Weg übereinstimmen. Betrachten wir den allgemeineren Fall



Der Körper/Massenpunkt könne sich nur in Richtung von $\vec{s}$ bewegen. Für die Arbeit (die an diesem Körper geleistet wird) ist daher nur die Kraftkomponente $\vec{F}_x$, die parallel zu $\vec{s}$ liegt, von Bedeutung. Unter Verwendung des Winkels $\angle(\vec{s}; \vec{F}) = \theta$, gilt dann:

$$A = \left|\vec{F}_x\right| \, |\vec{s}| = \left|\vec{F}\right| \cos\theta \, |\vec{s}|$$

Skalarprodukt II

Diese und ähnliche Anwendungen führen zur Definition des Skalarprodukts

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\,\vec{b} = (\vec{a}\,\vec{b}) = \langle \vec{a}\,\vec{b} \rangle = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\theta = ab\cos\theta$$

wobei der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel θ so gemessen wird, daß er zwischen 0 und 180° liegt. In grau sind alternative Schreibweisen des Skalarprodukts gezeigt. Mit Hilfe des Skalarprodukts läßt sich z.B. die Arbeit einfach als

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

definieren.

Anmerkungen: (i) Das Ergegnis des Skalarprodukts ist eine Zahl (=Skalar). Daher, (ii) hat das Skalarprodukt auch keine eindeutige Umkehrung.
(iii) Das Skalarprodukt ist kommutativ

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},$$

(iv) distributiv bezüglich Vektoraddition

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b}$$

und (v) gilt:

$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda\,\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Skalarprodukt III

Aus den Eigenschaften des Kosinus ergibt sich, daß das Skalarprodukt zweier Vektoren verschwindet, wenn sie einen Winkel von 90° einschließen ($\cos 90^\circ = 0$). Somit gilt, daß *zwei Vektoren genau zueinander normal stehen, wenn ihr Skalarprodukt* $= 0$ *ist*.

Ein weiterer wichtiger Spezialfall ist

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a\, a \cos 0^\circ = a^2 = |\vec{a}|^2$$

woraus sich der Betrag eines Vektors auch als

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

definieren läßt. (Dieses per se triviale Ergebnis hat Konsequenzen für Vektoren mit komplexen Komponenten!)

Die Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ in 2D, bzw. $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ in 3D stehen aufeinander normal. Somit gilt z.B

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1, \text{ aber } \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$$

Derartige Zusammenhänge lassen sich mit Hilfe des sogenannten Kronecker-Symbols kompakt schreiben:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = k \\ 0 \text{ für } i \neq k. \end{cases} \qquad (*)$$

Skalarprodukt in Komponentendarstellung

Für

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

erhält man durch direktes Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} = \; & a_1 b_1 \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 + a_1 b_2 \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + a_1 b_3 \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 + \\ & a_2 b_1 \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 + a_2 b_2 \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 + a_2 b_3 \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 + \\ & a_3 b_1 \vec{e}_3\cdot\vec{e}_1 + a_3 b_2 \vec{e}_3\cdot\vec{e}_2 + a_3 b_3 \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3\end{aligned}$$

die grauen Terme fallen wegen (*) weg, und mit $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_i = 1$ findet man die (vermutlich bekannte) Rechenregel:

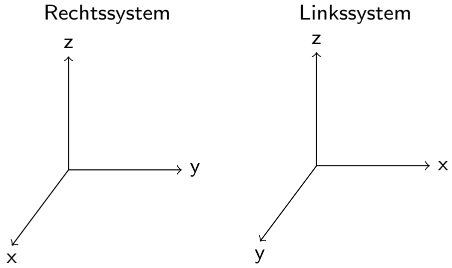
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Zum Abschluß ein Beispiel mit Zahlen:

$$\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\5\end{pmatrix} = (1)\,(-2) + (3)\,(2) + (-1)\,(5) = -2 + 6 - 5 = -1$$

Rechts- und Linkssystem, Dreifingerregel/Rechte-Hand-Regel

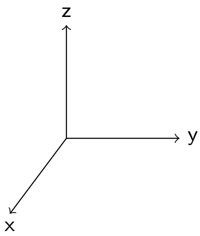
In 3D sollte man aufpassen, nicht irrtümlich mit einem Linkssystem zu operieren



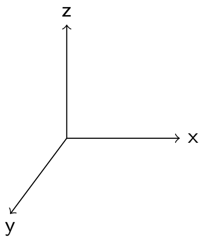
Rechts- und Linkssystem, Dreifingerregel/Rechte-Hand-Regel

In 3D sollte man aufpassen, nicht irrtümlich mit einem Linkssystem zu operieren

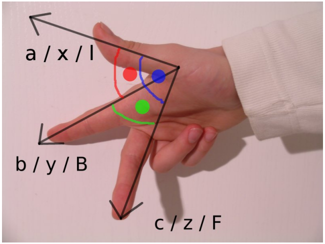
Rechtssystem



Linkssystem



Stehen die drei Basisvektoren in $x-$, $y-$ und $y-$Richtung wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der *rechten* Hand



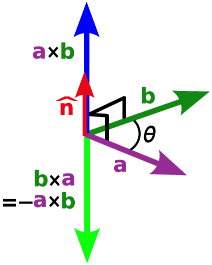
so handelt es sich um ein Rechtssystem.

Vektorprodukt

Die Physik (z.B. Drehmoment, Elektromagnetismus) motiviert im $\mathbb{R}^3$ (3D und nur dort!) ein zweites Produkt zweier Vektoren, das sog. Vektorprodukt (bzw. Kreuzprodukt oder äußeres Produkt)

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}\,\vec{b}] = \underbrace{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin\theta}_{|\vec{c}|}\ \vec{c}^{\circ}$$

(Wie beim Skalarprodukt zeigt der graue Text eine alternative Schreibweise für das Vektorprodukt). θ ist wieder der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ($0 \leq \theta \leq 180^\circ$). Der Resultatsvektor $\vec{c}$ hat die Länge $|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin\theta$ und steht *normal* zu $\vec{a}$ sowie $\vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$. Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden (in dieser Reihenfolge) ein *Rechtssystem*.



Vektorprodukt II

Anmerkungen: (i) Es folgt aus der Definition, daß das Vektorprodukt *nicht* kommutativ ist, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
(ii) Da der Sinus bei 0° und 180° verschwindet, verschwindet das Vektorprodukt zweier paralleler Vektoren.
(iii) Geometrisch kann die Länge des Resultatsvektors $|\vec{c}|$ als die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms interpretiert werden.
(iv) Auch das Vektorprodukt hat keine eindeutige Umkehrung
(v) Das Vektorprodukt ist auch nicht assoziativ, jedoch
(vi) distributiv bezüglich der Vektoraddition
(vii) Das Vektorprodukt ist nur für dreidimensionale Vektoren definiert

Vektorprodukt der Basisvektoren: Aus der Definition des Vektorprodukts folgt sofort, daß das Vektorprodukt eines Basisvektors mit sich selbst Null ist, d.h.

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_i = 0$$

Für Kreuzprodukte der Form $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = 0$, $i \neq j$ muß der Ergebnisvektor ebenfalls die Länge 1 haben (warum?) und parallel zum jeweils dritten Basisvektor $\vec{e}_k$, $k \neq i, j$ sein (dieser dritte Vektor ist ja per Definition normal zu den beiden anderen Basisvektoren!). Nur das Vorzeichen muß mit der Dreifingerregel bestimmt werden. Es gilt

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \qquad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 \qquad \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \qquad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$$

Komponentendarstellung des vektoriellen Produkts

Für

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

erhält man durch direktes Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} = \; & a_1 b_1 \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + a_1 b_2 \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + a_1 b_3 \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \; + \\
& a_2 b_1 \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + a_2 b_2 \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 + a_2 b_3 \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \; + \\
& a_3 b_1 \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + a_3 b_2 \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 + a_3 b_3 \vec{e}_3 \times \vec{e}_3
\end{aligned}$$

Wegen der eben gezeigten Rechenregeln für Kreuzprodukte der Basikvektoren fallen die grauen Terme weg, und die anderen Terme lassen sich vereinfachen. Somit findet man:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_3$$

Der folgende Trick hilft als **Merkregel**: Man schreibt wie gezeigt die x-Komponenten der beiden Vektoren unter der z-Komponente nochmals an.

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ a_1 \end{array} + \begin{array}{c}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ b_1 \end{array} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} \\ \end{array}$$

Komponentendarstellung des vektoriellen Produkts

Für

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

erhält man durch direktes Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} = {} & a_1 b_1\vec{e}_1\times\vec{e}_1 + a_1 b_2\vec{e}_1\times\vec{e}_2 + a_1 b_3\vec{e}_1\times\vec{e}_3 + \\ & a_2 b_1\vec{e}_2\times\vec{e}_1 + a_2 b_2\vec{e}_2\times\vec{e}_2 + a_2 b_3\vec{e}_2\times\vec{e}_3 + \\ & a_3 b_1\vec{e}_3\times\vec{e}_1 + a_3 b_2\vec{e}_3\times\vec{e}_2 + a_3 b_3\vec{e}_3\times\vec{e}_3\end{aligned}$$

Wegen der eben gezeigten Rechenregeln für Kreuzprodukte der Basikvektoren fallen die grauen Terme weg, und die anderen Terme lassen sich vereinfachen. Somit findet man:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_3$$

Der folgende Trick hilft als **Merkregel**: Man schreibt wie gezeigt die x-Komponenten der beiden Vektoren unter der z-Komponente nochmals an. Für die x-Komponente des Kreuzprodukts sind nur die y- und z-Komponenten der Ausgangsvektoren von Interesse, wobei das Produkt der grünmarkierten Komponenten vom Produkt der roten Kompoenten abzuziehen ist.

$$\begin{matrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ a_1 \end{matrix} + \begin{matrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ b_1 \end{matrix} = \begin{matrix}\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ \\ \\ \end{pmatrix} \\ \end{matrix}$$

Komponentendarstellung des vektoriellen Produkts

Für

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

erhält man durch direktes Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} = \; & a_1 b_1 \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + a_1 b_2 \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + a_1 b_3 \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \; + \\ & a_2 b_1 \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + a_2 b_2 \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 + a_2 b_3 \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \; + \\ & a_3 b_1 \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + a_3 b_2 \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 + a_3 b_3 \vec{e}_3 \times \vec{e}_3\end{aligned}$$

Wegen der eben gezeigten Rechenregeln für Kreuzprodukte der Basikvektoren fallen die grauen Terme weg, und die anderen Terme lassen sich vereinfachen. Somit findet man:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_3$$

Der folgende Trick hilft als **Merkregel**: Man schreibt wie gezeigt die x-Komponenten der beiden Vektoren unter der z-Komponente nochmals an. Für die x-Komponente des Kreuzprodukts sind nur die y- und z-Komponenten der Ausgangsvektoren von Interesse, wobei das Produkt der grünmarkierten Komponenten vom Produkt der roten Kompoenten abzuziehen ist. Man wiederholt dies sinngemäß für die y- und z-Komponente.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} a_1 & \qquad & b_1 \end{matrix}$$

Komponentendarstellung des vektoriellen Produkts

Für

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

erhält man durch direktes Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} = \; & {\color{gray} a_1 b_1 \vec{e}_1 \times \vec{e}_1} + a_1 b_2 \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + a_1 b_3 \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \; + \\ & a_2 b_1 \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + {\color{gray} a_2 b_2 \vec{e}_2 \times \vec{e}_2} + a_2 b_3 \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \; + \\ & a_3 b_1 \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + a_3 b_2 \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 + {\color{gray} a_3 b_3 \vec{e}_3 \times \vec{e}_3}\end{aligned}$$

Wegen der eben gezeigten Rechenregeln für Kreuzprodukte der Basikvektoren fallen die grauen Terme weg, und die anderen Terme lassen sich vereinfachen. Somit findet man:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_3$$

Der folgende Trick hilft als **Merkregel**: Man schreibt wie gezeigt die x-Komponenten der beiden Vektoren unter der z-Komponente nochmals an. Für die x-Komponente des Kreuzprodukts sind nur die y- und z-Komponenten der Ausgangsvektoren von Interesse, wobei das Produkt der grünmarkierten Komponenten vom Produkt der roten Kompoenten abzuziehen ist. Man wiederholt dies sinngemäß für die y- und z-Komponente.

$$\begin{pmatrix} {\color{red} a_1} \\ {\color{green} a_2} \\ {\color{gray} a_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {\color{green} b_1} \\ {\color{red} b_2} \\ {\color{gray} b_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\color{red} a_2 b_3} - {\color{green} a_3 b_2} \\ {\color{red} a_3 b_1} - {\color{green} a_1 b_3} \\ {\color{red} a_1 b_2} - {\color{green} a_2 b_1} \end{pmatrix}$$

$${\color{gray} a_1} \qquad {\color{gray} b_1}$$

Erweiterungen

Bis jetzt wurden Vektoren sowie das Rechnen mit diesen im zwei- und dreidimensionalen Raum besprochen. Die Komponenten dieser Vektoren waren reelle Zahlen. Es sollte nicht allzusehr überraschen, daß dieser klassische und anschauliche Vektorbegriff in mehrfacher Hinsicht erweitert werden kann.

- Vier und mehr Dimensionen, ja sogar unendlich viele Dimensionen
- Komponenten des Vektors sind komplexe Zahlen
- Komponenten des Vektors sind Funktionen (vektorwärtige Funktionen)
- Differential- und Integralrechnung vektorwärtiger Funktionen (Vektoranalysis)

Die folgenden Folien sollen diese Punkte illustrieren.

Vektoren in vier und mehr Dimensionen

In manchen Anwendungen ergibt sich die Notwendigkeit vier (oder auch viel mehr) Dimensionen "zusammenzufassen" — Vektoren bieten sich geradezu an. Beispiele:

- Relativitätstheorie: Die Zeit t wird als vierte Dimension hinzugenommen. Genaugenomment ist die vierte Komponente komplex, ein Vektor im Minkowskiraum hat die Form $\vec{x} = (x, y, z, ict)$, c ist Lichtgeschwindigkeit.
- Koordinaten, Geschwindigkeiten etc. von Vielteilchensystemen: Denken Sie an ein Protein mit seinen hunderten oder tausenden Atomen. Jedes dieser insgesamt N Atome hat Koordinaten $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i) = (r_{i_x}, r_{i_y}, r_{i_z})$, mit $i = 1, \ldots, N$. Es ist oft zweckmäßig, diese N Koordinaten zu einer einzigen "Ortskoordinate" $\vec{R}$ zusammenzufassen, was einem Vektor der Dimensionalität $3N$ entspricht:

  $$\vec{R} = (r_{1_x}, r_{1_y}, r_{1_z}, r_{2_x}, r_{2_y}, r_{2_z}, \ldots, r_{N_x}, r_{N_y}, r_{N_z})$$

  Analog kann man z.B. auch die N Geschwindigkeiten $\vec{v}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ aller Atome (Atome bewegen sich!) zu

  $$\vec{V} = (v_{1_x}, v_{1_y}, v_{1_z}, v_{2_x}, v_{2_y}, v_{2_z}, \ldots, v_{N_x}, v_{N_y}, v_{N_z})$$

  zusammenfassen.
- Der thermodynamische Zustand eines Mehrkomponentensystems kann z.B. durch V (Volumen), T (Temperatur) und n_i, $i = 1, \ldots, k$, (Molmengen der k Komponenten) beschrieben werden. Je nach Anwendung kann es sinnvoll sein, diese Größen einzeln zu behandeln, oder zu einem Vektor $(V, T, n_1, n_2, \ldots, n_k)$ zusammenzufassen.

Manchmal dient ein derartiges Zusammenfassen bloß der kompakten Notation, sehr oft wird mit diesen höherdimensionalen Vektoren auch gerechnet.

Rechnen mit höherdimensionalen Vektoren

- Alle besprochenen Rechenregeln gelten wie in 2D und 3D, mit folgender
- Ausnahme: Das Vektorprodukt ist nur für dreidimensionale Vektoren definiert und sinnvoll!

Beispiele: Sei

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dann ist:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 + (-1) \\ 2 + 3 \\ 3 + (-4) \\ 4 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 = -1$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \textit{nicht definiert!}$$

Generisch definieren sich höherdimensionale Vektoren (bzw. die Vektorräume zu denen sie gehören) dadurch, daß ein Mindestmaß von Operationen in ihnen gestattet/definiert ist (z.B. Abgeschlossenheit bezüglich (einer möglicherweise verallgemeinerten) Addition, Kommutativität und Assoziativität dieser Addition, Existenz des Nullelements und des inversen Elements, Abgeschlossenheit bezüglich skalarer Multiplikation, darüberhinaus oft Existenz der Norm (“verallgemeinerte Länge”) und eines Skalarprodukts)

Vektoren mit komplexen Komponenten

Wir betrachen die zwei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \\ -3i \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -i \\ 3 \\ -4-i \end{pmatrix}$$

und wollen $\vec{a} + \vec{b}$, sowie $\vec{a} \cdot \vec{b}$ berechnen. Für die Addition ändert sich nichts, es gilt

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1+(-i) \\ 2+i+3 \\ -3i+(-4-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 5+i \\ -4-4i \end{pmatrix}$$

in völliger Analogie zur Addition reeller Vektoren.

Etwas anders sieht es für das Skalarprodukt aus. Dieses wird definiert als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x^* + a_y \cdot b_y^* + a_z \cdot b_z^*,$$

wobei der Stern die konjugiert komplexe Zahl bedeutet. (Analoge Definitionen gelten für 2D und höherdimensionale komplexe Vektoren!) Für unser Beispiel heißt das:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (+i) + (2+i) \cdot 3 + (-3i) \cdot (-4+i) = 9 + 16i$$

Die Definition des komplexen Skalarprodukts erklärt sich wie folgt: Es sollte nach wie vor $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ gelten, und das Ergebnis dieser Operation sollte einer Länge (= positive, reelle Zahl!) entsprechen. Würden wir $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ berechen, so erhielten wir (mit unseren Zahlen) $|\vec{a}| = \sqrt{-5+4i}$, also eine komplexe Zahl. Verwenden wir hingegen die korrekte Definition $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x a_x^* + a_y a_y^* + a_z a_z^*$, so ist $|\vec{a}| = \sqrt{1 \cdot 1 + (2+i) \cdot (2-i) + (-3i)(+3i)} = +\sqrt{15} \in \mathbb{R}$

Funktionen als Vektorkomponenten

Es sei $\vec{r}$ die Ortskoordinate eines sich bewegenden Massenpunkts im Raum. In diesem Fall werden sich die Komponenten des Vektors als Funktion der Zeit ändern, d.h.,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \vec{r}(t)$$

Die Geschwindigkeit dieses Massenpunkts ergibt sich durch Differentiation nach der Zeit t. Man erhält die Ableitung $d\vec{r}(t)/dt = \dot{\vec{r}}(t)$ indem man die Komponenten des Vektors differenziert, d.h.

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Ganz analog läßt sich auch ein Vektor, dessen Komponenten Funktionen einer Variablen sind, integrieren, d.h.

$$\int \vec{a}(u)du = \begin{pmatrix} \int a_x(u)du \\ \int a_y(u)du \\ \int a_z(u)du \end{pmatrix}$$

Der Gradient

Zu einer Funktion von n Veränderlichen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kann man n partielle Ableitungen $\partial f/\partial x_1$, ..., $\partial f/\partial x_n$ bilden. Faßt man diese n Ableitungen zu einem Vektor zusammen, so bezeichnet man diesen als Gradient von f (grad f, Symbol $\vec{\nabla} f$):

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Sucht man z.B. Extremstellen von f, so ist die notwendige Voraussetzung für Kanditatenpunkte, daß die ersten, partiellen Ableitungen verschwinden. Mit Hilfe des Gradienten, kann man diese Bedingung kompakt als

$$\vec{\nabla} f = 0$$

schreiben. Das Symbol $\vec{\nabla}$ wird als *Nablaoperator* bezeichnet:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} \vec{e}_n$$

Läßt man diesen auf eine Funktion f operieren, so erhält man wie oben gezeigt den Gradienten $\vec{\nabla} f$. Der Nablaoperator macht aus der *skalaren* Funktion f (f weist einem n-Tupel von Werten $(x_1, \ldots, x_n)$ in eindeutiger Weise eine Zahl(=Skalar!) zu) einen Vektor. Im allgemeinen ist jede Komponente des Gradienten wieder eine Funktion aller n Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Ein physikalisches Beispiel eines Gradienten ist die Kraft $\vec{F}$,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

wobei V die potentielle Energie des Systems ist.

Gradient, Potentielle Energie, Kraft — ein Beispiel

Wir betrachten die Coulombwechselwirkung zwischen zwei Ladungen q_1 und q_2 mit Koordinaten $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Die potentielle Energie V_{elec} als Funktion des Abstands $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ ist

$$V_{elec} \propto \frac{q_1 q_2}{r}$$

Das Proportionalitätszeichen $\propto$ deutet an, daß je nach Einheitensystem noch ein Vorfaktor fehlt. $V_{elec} = V_{elec}(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$, da $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.
Wir suchen z.B. die Kraft $\vec{F}_1$, die auf Teilchen 1 wirkt, d.h.,

$$\vec{F}_1 = -\vec{\nabla}_1 V_{elec} = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial z_1}\right) V_{elec} = -\left(\frac{\partial V_{elec}}{\partial x_1}, \frac{\partial V_{elec}}{\partial y_1}, \frac{\partial V_{elec}}{\partial z_1}\right)$$

(der Subskript 1 in $\vec{\nabla}_1$ verdeutlicht, daß uns nur die Ableitungskomponenten von Teilchen (Ladung) 1 interessieren)
Eine kurze Rechnung ergibt z.B. (bitte ergänzen Sie die fehlenden Schritte!)

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{q_1 q_2}{r} = \ldots = +\frac{q_1\, q_2\, (x_2 - x_1)}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}} = +\frac{q_1\, q_2\, (x_2 - x_1)}{r^3}$$

Somit ist

$$\vec{F}_1 = -\vec{\nabla}_1 V_{elec} = -\frac{q_1 q_2}{r^3} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} = -\frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$$

(Auch ohne Mathematik sollte klar sein, daß $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ ist.)

Version 1.2, November 2002
Copyright © 2000,2001,2002 Free Software Foundation, Inc.

51 Franklin St, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301 USA

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "**Document**", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "**you**". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "**Modified Version**" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "**Secondary Section**" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "**Invariant Sections**" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "**Cover Texts**" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "**Transparent**" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "**Opaque**". Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.
The "**Title Page**" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.
A section "**Entitled XYZ**" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "**Acknowledgements**", "**Dedications**", "**Endorsements**", or "**History**".) To "**Preserve the Title**" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.
The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.
You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.
If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.
It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.

C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.

D. Preserve all the copyright notices of the Document.

E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.

F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.

G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

H. Include an unaltered copy of this License.

I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.

J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.

K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.

L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.

M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.

N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.

O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.
You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties–for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.
You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.
The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.
The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number.
Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.
In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.
You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an “aggregate” if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation’s users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document’s Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4.

Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled “Acknowledgements”, “Dedications”, or “History”, the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License “or any later version” applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

> *Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".*

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with ... Texts." line with this:

> *with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.*

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.