Rechnen mit Matrizen, Determinanten etc.

Stefan Boresch

Department of Computational Biological Chemistry
Faculty of Chemistry
University of Vienna

January 27, 2010

Matrizen: Definition, Nomenklatur etc.

Eine $m \times n$ Matrix ist eine rechteckige Anordnung "mathematischer Objekte", also insbesondere von Zahlen oder Funktionen, mit m Reihen und n Spalten.*

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \boldsymbol{a_{ij}} & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Wir werden Matrizen als ganzes mit fetten Großbuchstaben kennzeichnen (z.B. $\boldsymbol{A}$). Für allgemeine Matrixelemente ist es üblich, die entsprechenden Kleinbuchstaben zu verwenden, d.h., Elemente einer Matrix **A** werden mit a_{11}, a_{12} usw. bezeichnet. Das Element a_{ij} bezeichet den Eintrag in der i-ten Reihe und j-ten Spalte der Matrix. Für manche Operationen mit einer Matrix reicht es, ein prototypisches Element zu betrachten, daher ist manchmal die Schreibweise (a_{ij}) vorteilhaft, weil sie einerseits die komplette Matrix bezeichnet, andererseits aber auch die Möglichkeit bietet klarzumachen, was mit den Matrixelementen passiert (Beispiele folgen).

* "rows" und "columns" auf Englisch. Reihen werden häufig als *Zeilen* bezeichnet. In der Tat ist Reihe insofern mißverständlich, als eine Reihe ja horizontal oder vertikal sein könnte. Wenn nicht anders vermerkt, wird im folgenden Reihe synonym mit Zeile für *horizontale Reihen* verwendet!

Matrizen: Beispiele

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1+i & -2+i \\ 5-3i & 2+5i \\ i & -7 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ x^3 & x^4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

- **A** ist eine 3×3 Matrix mit reellen Elementen
- **B** ist eine 3×2 Matrix mit komplexen Elementen
- **C** ist eine 2×2 Matrix, deren Elemente Funktionen einer Veränderlichen x sind
- **D** ist eine 2×2 Matrix, deren Elemente die möglichen zweiten Ableitungen einer Funktion $f = f(x, y)$ nach x und y sind.
- Matrizen **A**, **C** und **D** sind *quadratische* Matrizen (gleiche Anzahl von Reihen und Spalten).

Transponierte einer Matrix

Eine ganz wichtige Matrixoperation ist das Vertauschen ("Stürzen") von Reihen und Spalten. Die so erhaltene Matrix bezeichnet man als *Transponierte* (der Matrix):

$$\boldsymbol{A}^T = (a_{ij})^T = (a_{ji})$$

Beispiele: Die Transponierten der Matrizen **A** und **B** der Vorseite sind

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} 1+i & 5-3i & i \\ -2+i & 2+5i & -7 \end{pmatrix}$$

Hat eine Matrix **B** komplexe Elemente, so sind auch die Matrizen mit konjugiert komplexen Elementen $\bar{\boldsymbol{B}} = (\bar{b}_{ij})$ (*Konjugierte*) und die Transponierte der konjugierten Matrix $\boldsymbol{B}^* = \bar{\boldsymbol{B}}^T = (\bar{b}_{ji})$ (*Adjungierte*) von Bedeutung. (**Achtung:** Die Verwendung der Symbole - bzw. * ist in der Literatur nicht eindeutig; im Zweifelsfall vergewissern, was z.B. mit $\bar{\boldsymbol{A}}$ wirklich gemeint ist!) Für unser Beispiel:

$$\bar{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 1-i & -2-i \\ 5+3i & 2-5i \\ -i & -7 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B}^* = \begin{pmatrix} 1-i & 5+3i & -i \\ -2-i & 2-5i & -7 \end{pmatrix}$$

Begriffe / Anmerkungen zu quadratischen Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

- Die Elemente a_{ii} einer quadratischen(!) Matrix bezeichnet man auch als Elemente der *(Haupt)diagonalen*

Begriffe / Anmerkungen zu quadratischen Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

- Die Elemente a_{ii} einer quadratischen(!) Matrix bezeichnet man auch als Elemente der *(Haupt)diagonalen*
- Dementsprechend spricht man manchmal auch von der *Nebendiagonalen*

Begriffe / Anmerkungen zu quadratischen Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

- Die Elemente a_{ii} einer quadratischen(!) Matrix bezeichnet man auch als Elemente der *(Haupt)diagonalen*
- Dementsprechend spricht man manchmal auch von der *Nebendiagonalen*
- (Quadratische) Matrizen, bei denen alle Elemente oberhalb (unterhalb) der Diagonalen null sind, bezeichnet man als Dreiecksmatrizen. Obere Dreiecksmatrix bzw.

Begriffe / Anmerkungen zu quadratischen Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

- Die Elemente a_{ii} einer quadratischen(!) Matrix bezeichnet man auch als Elemente der *(Haupt)diagonalen*
- Dementsprechend spricht man manchmal auch von der *Nebendiagonalen*
- (Quadratische) Matrizen, bei denen alle Elemente oberhalb (unterhalb) der Diagonalen null sind, bezeichnet man als Dreiecksmatrizen. Obere Dreiecksmatrix bzw.
- untere Dreiecksmatrix

Begriffe / Anmerkungen zu quadratischen Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

- Die Elemente a_{ii} einer quadratischen(!) Matrix bezeichnet man auch als Elemente der *(Haupt)diagonalen*
- Dementsprechend spricht man manchmal auch von der *Nebendiagonalen*
- (Quadratische) Matrizen, bei denen alle Elemente oberhalb (unterhalb) der Diagonalen null sind, bezeichnet man als Dreiecksmatrizen. Obere Dreiecksmatrix bzw.
- untere Dreiecksmatrix
- Sind nur in der (Haupt)diagonalen Elemente, so spricht man von einer Diagonalmatrix,

Begriffe / Anmerkungen zu quadratischen Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Die Elemente a_{ii} einer quadratischen(!) Matrix bezeichnet man auch als Elemente der *(Haupt)diagonalen*
- Dementsprechend spricht man manchmal auch von der *Nebendiagonalen*
- (Quadratische) Matrizen, bei denen alle Elemente oberhalb (unterhalb) der Diagonalen null sind, bezeichnet man als Dreiecksmatrizen. Obere Dreiecksmatrix bzw.
- untere Dreiecksmatrix
- Sind nur in der (Haupt)diagonalen Elemente, so spricht man von einer Diagonalmatrix,
- sind alle diese Element 1, so handelt es sich um die Einheitsmatrix (**E** oder **I** oder **1** geschrieben)

Begriffe / Anmerkungen zu quadratischen Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

- Die Elemente a_{ii} einer quadratischen(!) Matrix bezeichnet man auch als Elemente der *(Haupt)diagonalen*
- Dementsprechend spricht man manchmal auch von der *Nebendiagonalen*
- (Quadratische) Matrizen, bei denen alle Elemente oberhalb (unterhalb) der Diagonalen null sind, bezeichnet man als Dreiecksmatrizen. Obere Dreiecksmatrix bzw.
- untere Dreiecksmatrix
- Sind nur in der (Haupt)diagonalen Elemente, so spricht man von einer Diagonalmatrix,
- sind alle diese Element 1, so handelt es sich um die Einheitsmatrix (**E** oder **I** oder **1** geschrieben)
- Zurück zur Startmatrix:

Begriffe / Anmerkungen zu quadratischen Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

- Die Elemente a_{ii} einer quadratischen(!) Matrix bezeichnet man auch als Elemente der *(Haupt)diagonalen*
- Dementsprechend spricht man manchmal auch von der *Nebendiagonalen*
- (Quadratische) Matrizen, bei denen alle Elemente oberhalb (unterhalb) der Diagonalen null sind, bezeichnet man als Dreiecksmatrizen. Obere Dreiecksmatrix bzw.
- untere Dreiecksmatrix
- Sind nur in der (Haupt)diagonalen Elemente, so spricht man von einer Diagonalmatrix,
- sind alle diese Element 1, so handelt es sich um die Einheitsmatrix (**E** oder **I** oder **1** geschrieben)
- Zurück zur Startmatrix:
- Für quadratische Matrizen entspricht Transponieren dem Spiegeln an der Hauptdiagonalen

Symmetrieeigenschaften quadratischer Matrizen

Gilt $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$, so bezeichnet man $\mathbf{A}$ als *symmetrisch*. Gilt hingegen $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T$, so spricht man von einer *antisymmetrischen* Matrix. Z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{symmetrisch}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{antisymmetrisch}$$

Für Matrizen mit komplexen Elementen wird symmetrisch/antisymmetrisch durch die Eigenschaften *hermitesch* (selbstadjungiert, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*$) — *antihermitesch* ($\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^*$) ersetzt. Beispiele:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1-2i & 0 \\ 1+2i & 0 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{hermitesch}$$

$$\begin{pmatrix} i & 1+i & 2i \\ -1+i & 5i & 3 \\ 2i & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{antihermitesch}$$

Verständnisaufgabe: Für die Hauptdiagonalelemente solcher Matrizen gilt (i) Antisymmetrische Matrix: alle Elemente null, (ii) hermitesche Matrix: nur reelle Zahlen, (iii) antihermitesche Matrix: imaginär oder null. Warum?

Rechnen mit Matrizen

- Zwei $m \times n$ Matrizen **A** und **B** sind gleich, wenn alle korrespondierenden Elemente der beiden Matrizen gleich sind, d.h.

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, \dots m, \quad j = 1, \dots n$$

- Addition zweier $m \times n$ Matrizen **A** und **B** bedeutet, daß die jeweils entsprechenden Elemente der beiden Matrizen addiert werden, d.h.,

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (c_{ij})$$

  NB: Für unterschiedlich große Matrizen existiert keine Addition! Matrixaddition ist kommutativ und assoziativ

- Eine Matrix **A** wird einem Skalar (einer Zahl) λ multipliziert, in dem jedes Element von **A** mit λ multipliziert wird

$$\lambda \boldsymbol{A} = \lambda(a_{ij}) = (\lambda\, a_{ij})$$

  Für Addition und Multiplikation mit einem Skalar gelten die entsprechenden Distributivgesetze.

- Insbesondere wird Multiplikation einer Matrix **A** mit -1 als $-\boldsymbol{A}$ geschrieben (abgekürzt).
- Daraus folgt die Definition der Subtraktion zweier $m \times n$ Matrizen **A** und **B**

$$\boldsymbol{C} = (c_{ij}) = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-1)\boldsymbol{B} = (a_{ij}) + (-1)(b_{ij}) = (a_{ij}) + (-b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$$

Rechnen mit Matrizen II — Multiplikation

Für Matrizen **A** und **B** ist ein Produkt (inneres Produkt) definiert, wenn die Anzahl der Spalten von **A** mit der Anzahl der Reihen von **B** übereinstimmt. Es sei **A** eine $m \times n$ und **B** eine $n \times p$ Matrix. Dann existiert das Matrixprodukt $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, **C** ist eine $m \times p$ Matrix. Für die Dimensionen gilt also

$$(m \times n) \text{ mal } (n \times p) \Rightarrow (m \times p)$$

Das Element c_{ij} in der i-ten Reihe und j-ten Spalte von $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ wird berechnet, indem jedes Element der i-ten Reihe von **A** mit dem korrespondierenden Element der j-ten Spalte von **B** multipliziert wird und die resultierenden Produkte addiert werden. In Symbolen bedeutet dies

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

Für zwei Matrizen **A** und **B** ist also zunächst immer zu klären, ob Matrixmultiplikation überhaupt möglich ist. Es sei

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Für diese Matrizen existiert das Produkt **AB**, *nicht jedoch* **BA**. Matrixmultiplikation ist daher **nicht kommutativ**! Selbst im Falle gleich großer quadratischer Matrizen **R** und **S**, für die sowohl **RS** als auch **SR** definiert ist, gilt im allgemeinen

$$\boldsymbol{RS} \neq \boldsymbol{SR}$$

Matrixmultiplikation

Für die konkrete Multiplikation unser Beispielmatrizen $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$ schreibt man zweckmäßigerweise die Matrizen wie gezeigt (Falk'sches Schema).

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} \end{pmatrix} \end{array}$$

Um c_{11} zu berechnen, benötigt man die Elemente der 1. Reihe von **A** und der 1. Spalte von **B**

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & 4 \\ \color{red}{6} & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \color{red}{2} & \color{red}{1} \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \color{red}{c_{11}} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} \end{pmatrix} \end{array}$$

und bildet

$$\color{red}{c_{11}} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 6 = \color{red}{8}$$

Matrixmultiplikation

Für c_{12} benötigt man die Elemente der 1. Reihe von **A** und der 2. Spalte von **B**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} \end{pmatrix}$$

und bildet

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 7$$

Wir illustrieren die Schritte nochmals für c_{42}. Hierzu benötigt man die Elemente der 4. Reihe von **A** und der 2. Spalte von **B**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 7 & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} \end{pmatrix}$$

und bildet

$$c_{42} = a_{41}b_{12} + a_{42}b_{22} = 5 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 10$$

Matrixmultiplikation

Bitte führen Sie die notwendigen Schritte für die restlichen Elemente selbst aus. Sie sollten $\boldsymbol{C} =$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 6 & 3 & 2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\\ 3 & 1\\ 5 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}8 & 7 & 10\\ 12 & 6 & 4\\ 9 & 9 & 14\\ 5 & 10 & 20\\ 27 & 18 & 20\end{pmatrix}\end{array}$$

erhalten.

Soferne alle auftretenden Produkte definiert sind (z.B. drei quadratische Matrizen identer Größe) gilt das Assoziativgesetz

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

und ebenso das Distributivgesetz

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C}$$

Einschub: Vektoren und Matrizen

Es sollte nicht überraschen, daß Vektoren als Matrizen aufgefaßt werden können.

$$\vec{x} = \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

ist eine 3×1 Matrix. Man spricht auch von Spaltenvektor. Man könnte den Vektor aber auch als 1×3 Matrix schreiben und spricht dann von einem Zeilenvektor

$$\vec{x} = \boldsymbol{x}^T = (1\ 2\ 3)$$

Wie wir noch sehen werden, ist Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix eine wichtige Operation (die z.B. bei Koordinatentransformationen auftritt). Werden Vektoren mit Matrizen multipliziert, so ist es allerdings nicht egal, ob man vom Zeilen- oder Spaltenvektor spricht; in diesem Fall muß man also zwischen $\mathbf{x}$ und $\boldsymbol{x}^T$ unterscheiden.

Multiplizieren wir unseren Vektor mit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, d.h., wir bilden $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \\ \boldsymbol{y} = & \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}14\\32\\50\end{pmatrix}\end{array}$$

Einschub: Vektoren und Matrizen

Wenn Sie die Schritte der Multiplikation $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ($\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ seien im folgenden Spaltenvektoren) langsam durchgehen, so fällt Ihnen vermutlich auf, daß die drei Rechnungen, die die Komponenten des Ergebnisvektors $\mathbf{y}$ ergeben, der Berechnung von Skalarprodukten ähneln — in der Schreibweise von Skalarprodukten

$$(1\ 2\ 3) \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14 \qquad (4\ 5\ 6) \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 32 \qquad (7\ 8\ 9) \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 50$$

Tatsächlich kann man umgekehrt bei Vektoren *mit reellen Elementen* das Skalarprodukt als Matrixprodukt auffassen

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} \ \ (= \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x})$$

NB: Nur die gezeigten Varianten sind möglich, *nicht* jedoch z.B. $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T$ (ergibt eine 3×3 Matrix, s.g. dyadisches Produkt!)

Weiters kann man für die Multiplikation zweier Matrizen $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$ *mit reellen Elementen (Erklärung folgt sofort!)* das Element $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$ in der i-ten Reihe und j-ten Spalte von $\mathbf{C}$ als "Skalarprodukt" der i-ten Reihe von $\mathbf{A}$ mit der j-ten Reihe von $\mathbf{B}$ auffassen.

Einschub: Vektoren und Matrizen

Die Analogie zwischen Skalarprodukt und Matrixmultiplikation stimmt allerdings nicht mehr ganz, wenn es um komplexe Vektoren / Matrizen geht. Erinnern Sie sich, daß das Skalarprodukt zweier komplexer Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ als

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot \bar{v}_x + u_y \cdot \bar{v}_y + u_z \cdot \bar{v}_z$$

definiert ist, d.h., vom "zweiten" Vektor werden die konjugiert komplexen Elemente genommen.

Bei der Multiplikation zweier komplexer Matrizen hingegen werden die entsprechenden Elemente "normal" (unverändert) miteinander multipliziert. Beispiel:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ i & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2+3i \\ -3 & 2+11i \end{pmatrix}$$

Die Komponente c_{11} berechnet sich nach der ganz normalen Regel für Matrixmultiplikation, d.h. konkret

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \cdot 0 + i \cdot i = -1$$

usw. Will man daher das Skalarprodukt zweier komplexer Vektoren als Matrixmultiplikation schreiben, so muß man

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \boldsymbol{u}^T \bar{\boldsymbol{v}}$$

berechnen, d.h., man multipliziert die Transponierte des "ersten Vektors" mit den konjugiert komplexen Elementen des "zweiten" Vektors. Spätestens an dieser Stelle sollte auch klar sein, daß das Skalarprodukt zweier Vektoren mit komplexen Elementen *nicht* kommutativ ist! Statt dessen gilt $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{\vec{v} \cdot \vec{u}}$

Einige spezielle Matrizen in Bezug auf Multiplikation

A sei eine beliebige quadratische Matrix. Im folgenden werden an Hand von Beispielen Matrizen **M** vorgestellt, mit denen sich die Reihen (Spalten) von **A** gezielt manipulieren lassen indem **A** mit diesen Matrizen von links (rechts) multipliziert wird. Wir illustrieren dies für die 3×3 Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

und Multiplikation von links, also $\boldsymbol{A}_{mod} = \boldsymbol{MA}$. Dabei werden Reihen manipuliert — Multiplikation von rechts (**AM**) würde Spalten manipulieren.

Bitte rechnen Sie die folgenden Beispiele nach!

Der Vollständigkeit halber zunächst der trivialste Fall: Multiplikation mit der Einheitsmatrix **E** (oft auch **I** oder **1** geschrieben):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Einige spezielle Matrizen in Bezug auf Multiplikation

A sei eine beliebige quadratische Matrix. Im folgenden werden an Hand von Beispielen Matrizen **M** vorgestellt, mit denen sich die Reihen (Spalten) von **A** gezielt manipulieren lassen indem **A** mit diesen Matrizen von links (rechts) multipliziert wird. Wir illustrieren dies für die 3×3 Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

und Multiplikation von links, also $\boldsymbol{A}_{mod} = \boldsymbol{MA}$. Dabei werden Reihen manipuliert — Multiplikation von rechts (**AM**) würde Spalten manipulieren.

Bitte rechnen Sie die folgenden Beispiele nach!

Ersetzt man in **E** eine der Einsen durch eine Zahl λ, so wird durch Multiplikation von links die entsprechende Reihe von **A** mit dieser Zahl multipliziert, z.B.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Einige spezielle Matrizen in Bezug auf Multiplikation

Vertauscht man in **E** zwei Reihen, so erhält man “Vertauschungsmatrizen” $\boldsymbol{M}_V$.
Multiplikation von links vertauscht in **A** die entsprechenden zwei Reihen, z.B.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b & c\\g & h & i\\d & e & f\end{pmatrix}$$

Einige spezielle Matrizen in Bezug auf Multiplikation

Vertauscht man in **E** zwei Reihen, so erhält man "Vertauschungsmatrizen" $\boldsymbol{M}_V$.
Multiplikation von links vertauscht in **A** die entsprechenden zwei Reihen, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Weiters kann man die Addition des Vielfachen einer Reihe zu einer anderen Reihe erreichen, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g + t\,a & h + t\,b & i + tc \end{pmatrix}$$

Einige spezielle Matrizen in Bezug auf Multiplikation

Vertauscht man in $\mathbf{E}$ zwei Reihen, so erhält man "Vertauschungsmatrizen" $\boldsymbol{M}_V$. Multiplikation von links vertauscht in $\mathbf{A}$ die entsprechenden zwei Reihen, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Weiters kann man die Addition des Vielfachen einer Reihe zu einer anderen Reihe erreichen, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ {\color{red}t} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g + t\,a & h + t\,b & i + tc \end{pmatrix}$$

Die Details dieser Matrizen sind nicht so wichtig. Merken sollen Sie sich jedoch, daß man durch Multiplikation (von links) mit "speziellen" Matrizen $\mathbf{M}$

- die Reihe einer Matrix $\mathbf{A}$ mit einem Faktor multiplizieren kann
- zwei Reihen von $\mathbf{A}$ vertauschen kann und
- zu einer Reihe das Vielfache einer anderen Reihe addieren bzw. subtrahieren kann.

Wie schon angemerkt, kann man durch Multiplikation von rechts Spalten manipulieren.

Die inverse Matrix

Als nächstes suchen wir die sogenannte *Inverse* einer Matrix **A**, üblicherweise als $\boldsymbol{A}^{-1}$ geschrieben. Diese motiviert sich aus der Division von Zahlen, d.h., es soll gelten

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$$

Wie wir in Kürze sehen werden, existiert nicht für alle **A** eine Inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$. Existiert hingegen $\boldsymbol{A}^{-1}$, so gilt auch

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$$

Das Verfahren, daß wir jetzt vorstellen werden, wird manchmal als "Reihenreduktion" bezeichnet.

Zunächst einmal die Idee. Es sei **A** eine Matrix, die invertierbar ist (für die $\boldsymbol{A}^{-1}$ existiert). Unser Werkzeug besteht aus den eben vorgestellten speziellen Matrizen, sowie der Assoziativität der Matrixmultiplikation. Man "bearbeitet" die zu invertierende Matrix **A** mit Matrizen, die Reihen vertauschen, skalieren bzw. das Vielfache einer Reihe von einer anderen Reihe abziehen, bis man bei der Einheitsmatrix landet. Schematisch sieht das wie folgt aus

$$\underbrace{\boldsymbol{M_n} \dots \boldsymbol{M_2}\,\boldsymbol{M_1}}_{\boldsymbol{A}^{-1}}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$$

$\boldsymbol{A}^{-1}$ gewinnt man, indem man die gleiche Abfolge von Operationen, denen man **A** unterwirft, auch auf **E** einwirken läßt, d.h.

$$\boldsymbol{M_n} \dots \boldsymbol{M_2}\,\boldsymbol{M_1}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^{-1}$$

Reihenreduktion

Wir illustrieren das Verfahren für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Anmerkungen: Wir führen nicht explizite Matrixmultiplikationen mit Matrizen $\boldsymbol{M}_i$ durch, sondern manipulieren die Reihen gemäß den Möglichkeiten, die diese erlauben. Führt man Reihenreduktion mit einer nicht invertierbaren Matrix durch, dann merkt man dies "automatisch" (s. 2. Beispiel). Es gibt im Prinzip oft verschiedene Reihenfolgen, die alle zum Ziel führen. Ich empfehle, die Matrix zunächst auf obere (oder untere) Dreiecksform zu bringen, denn spätestens an diesem Punkt wird klar, ob die Matrix invertierbar ist.

- (1) Wir addieren (-3)-mal die I. Reihe zu der II. Reihe, sowie (-2)-mal die I. Reihe zur III. Reihe, sowohl für $\mathbf{A}$, als auch $\mathbf{E}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (2) Um auf obere Dreiecksform zu kommen, addieren wir (-2)-mal die II. zur III. Reihe.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Reihenreduktion

Hat man obere Dreiecksform erreicht, so berechnet man das Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen. Ist dieses ungleich Null, so ist **A** invertierbar (warum das so ist, wird in Kürze aus der Eigenschaft von Determinanten klar werden). Dies ist in unserem Beispiel der Fall, und so machen wir weiter:

- (3) Multiplikation der III. Reihe mit $-1/5$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4/5 & 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

- (4) Nun ziehen wir 5-mal die III. von der II. Reihe ab

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4/5 & 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

- (5) und multiplizieren die II. Reihe mit $1/2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -4/5 & 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

Reihenreduktion

- (6) Es bleibt noch einmal die II. Reihe und einmal die III. Reihe zur I. Reihe zu addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7/10 & -1/10 & 3/10 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -4/5 & 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

Durchführen der Probe

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/10 & -1/10 & 3/10 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -4/5 & 2/5 & -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zeigt, daß die Matrix auf der rechten Seite tatsächlich die zu $\mathbf{A}$ Inverse ist.

Beispiel einer nicht-invertierbaren Matrix

Wir versuchen jetzt die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

zu invertieren. (Da sich diese als nicht-invertierbar herausstellen wird, verzichte ich auf die entsprechende Manipulation von $\mathbf{E}$). Wir ziehen von der II. Reihe 4-mal die I. Reihe, und von der III. Reihe 7-mal die I. Reihe ab

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

Ziehen wir jetzt von der III. Reihe zweimal die II. Reihe ab, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Produkt der Diagonalelemente ist gleich null. Weiters sieht man aber auch, daß keine für unsere Zwecke "legale" Operation die obige Matrix zu $\mathbf{E}$ "umformen" kann. Zu dieser Matrix $\mathbf{A}$ existiert keine Inverse.

Spur

Als Spur (englisch "trace") einer quadratischen Matrix bezeichnet man die Summe der Hauptdiagonalelemente, d.h. für eine $n \times n$ Matrix

$$tr(\boldsymbol{A}) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Beispiel: Die Spur von

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

ist $tr(\boldsymbol{A}) = 1 + 5 + 9 = 15$.

Für die Spur des Produkts zweier (mehrerer) Matrizen gilt

$$tr(\boldsymbol{AB}) = tr(\boldsymbol{BA}); \qquad tr(\boldsymbol{ABC}) = tr(\boldsymbol{BAC}) = tr(\boldsymbol{ACB}) = tr(\boldsymbol{CBA}) = \ldots$$

Bitte überzeugen Sie sich von der Richtigkeit der obigen Behauptung durch Ausprobieren an einem geeigneten Beispiel. Es ist sogar nicht einmal allzu schwer, obige Behauptung zu beweisen ...

Determinanten

Wie die Spur, ist eine Determinante die “Reduktion” einer quadratischen Matrix **A** auf *eine* Zahl. Wie wir zumindestens ansatzweise sehen werden, läßt diese Zahl (Wert der Determinante) gewisse Rückschlüsse auf die Eigenschaften der Matrix zu. Man könnte auch sagen, daß die Determinante die zu Grunde liegende Matrix “charakterisiert”.
Eine Determinante wird üblicherweise als

$$\det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

geschrieben
Fangen wir mit den einfachsten Fällen an. Eine 1×1 Matrix ist einfach eine Zahl; ihre Determinante ist die Zahl selbst, d.h.,

$$\boldsymbol{A}_{1\times 1} = (a_{11}), \quad \det(\boldsymbol{A}) = |a_{11}| = a_{11}$$

Die Determinante einer 2×2 Matrix berechnet sich nach folgendem Schema:

$$\boldsymbol{A}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$$

d.h., als Produkt der Hauptdiagonalelemente minus dem Produkt der Nebendiagonalelemente.

Determinanten

Die Determinante einer $n \times n$ Matrix ist eine Summe von $n!$ $(= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1)$ Termen, von denen jeder ein Produkt von n Elementen der Matrix ist, wobei jeweils genau ein und nur ein Element jeder Reihe und Spalte vorkommt.

Die Determinante einer 3×3 Matrix ist daher eine Summe von 6 $(3! = 6)$ Termen. Jeder Term hat die Form

$$a_{1\beta_1}\, a_{2\beta_2}\, a_{3\beta_3} \qquad (*)$$

Die unbestimmt gehaltenenen zweiten Indices β_1, β_2, β_3 sind eine Permutation der Indices 1, 2, 3 ($3! = 6$ solcher Permutationen sind möglich, z.B. (2 1 3) oder (1 3 2). Eine Permutation ist durch die Anzahl der Vertauschungen I (*Inversionen*) gegenüber der natürlichen Anordung der Zahlen (1 2 3) charakterisiert; ist die Anzahl gerade, so wird das Produkt (*) positiv addiert, ist die Anzahl der Inversionen negativ, so wird (*) subtrahiert. Am Beispiel der Determinante einer 3×3 Matrix, $\det(\boldsymbol{A}_{3\times 3}) =$

$$\begin{array}{lll}
+ & a_{11}\, a_{22}\, a_{33} & (0 \text{ Inversionen}) \\
- & a_{12}\, a_{21}\, a_{33} & (1 \text{ Inversion } (2\,1\,3) \to (1\,2\,3)) \\
- & a_{11}\, a_{23}\, a_{32} & (1 \text{ Inversion } (1\,3\,2) \to (1\,2\,3)) \\
+ & a_{13}\, a_{21}\, a_{32} & (2 \text{ Inversionen } (3\,1\,2) \to (1\,3\,2) \to (1\,2\,3)) \\
+ & a_{12}\, a_{23}\, a_{31} & (2 \text{ Inversionen } (2\,3\,1) \to (2\,1\,3) \to (1\,2\,3)) \\
- & a_{13}\, a_{22}\, a_{31} & (3 \text{ Inversionen } (3\,2\,1) \to (3\,1\,2) \to (1\,3\,2) \to (1\,2\,3))
\end{array}$$

$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$$

Determinanten

Die allgemeine Definition der Determinante einer $n \times n$ Matrix lautet

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{(\beta_1\,\beta_2\,\ldots\,\beta_n)} (-1)^I a_{1\beta_1}\, a_{2\beta_2}\, \ldots\, a_{n\beta_n}$$

wobei die Summe über alle $n!$ Permutationen $(\beta_1\,\beta_2\,\ldots\,\beta_n)$ läuft, und I die Anzahl der Inversionen ist. Die obige Formel ist für das Verständnis der Eigenschaften von Determinanten wichtig; für die Berechnung größerer Determinanten ist sie völlig ungeeignet — dazu mehr in Kürze.

In diesem Zusammenhang sei noch hinzugefügt, daß es für 3×3 Matrizen (ähnlich wie für den 2×2 Fall) ein leicht zu merkendes Berechnungsschema (Schema von *Sarrus*) gibt. Analoge Tricks für größere Matrizen gibt es nicht!

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{a12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$+a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$$

Erklärung: Man schreibt rechts neben der 3×3 Determinante nochmals die ersten beiden Spalten an. Damit kann man "parallel" zur Hauptdiagonalen noch zwei weitere von links oben nach rechts unten laufende Diagonalen bilden (in rot gezeigt). Ebenso kann man parallel zur Nebendiagonalen zwei weitere Diagonalen (von rechts oben nach links unten) bilden. Die Produkte der Elemente der "roten Diagonalen" werden addiert, die der "grünen Diagonalen" werden subtrahiert.

Eigenschaften von Determinanten

Wie schon gesagt, ist die Definition der Determinante zur Berechnung unbrauchbar. Die folgenden Eigenschaften von Determinanten helfen oft bei der Berechnung; insbesondere ermöglichen sie rasch zu sagen, ob eine Determinante ungleich null ist (was oft wichtiger ist, als der exakte Wert der Determinanten). Bitte rechnen Sie die folgenden Beispiele nach bzw. testen Sie die Eigenschaften mit selbstkonstruierten 2×2 oder 3×3 Matrizen.

Reihe steht im folgenden für "Reihe bzw. Spalte"

- 1) Werden in einer Determinante zwei (parallele) Reihen vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

- 2) Stimmen zwei parallele Reihen einer Determinanten überein, dann ist der Wert der Determinante gleich null.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

- 3) Sind alle Elemente einer Reihe gleich null, so ist der Wert der Determinante null

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Eigenschaften von Determinanten

Reihe steht im folgenden für "Reihe bzw. Spalte"

- 4) Multipliziert man alle Elemente einer Reihe mit demselben Faktor, so wird die Determinante mit diesem Faktor multipliziert

$$\begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot(-2) & 2\cdot 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

- 5) Aus 2) und 4) folgt, daß eine Determinante, die zwei proportionale, parallele Reihen enthält, gleich null ist.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 = 0$$

- 6) Die Summe zweier Determinanten, die sich nur in den Elementen ein und derselben Reihe unterscheiden, ist gleich einer Determinante, bei der in dieser Reihe die Summen der entsprechenden Elemente derselben Reihen der beiden ursprünglichen Reihen stehen

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+r & e+s & f+t \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Eigenschaften von Determinanten

Reihe steht im folgenden für “Reihe bzw. Spalte”

- 7) Eine Determinante ändert Ihren Wert nicht, wenn zu den Elementen einer Reihe die mit einem beliebigen Faktor multiplizierten Elemente einer parallelen Reihe addiert werden.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+\lambda a & e+\lambda b & f+\lambda c \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \lambda\, 0$$

- 8) Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Elemente der Hauptdiagnolelemente

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\, e\, i$$

Eigenschaften von Determinanten

- 9)
$$\det\mathbf{A}\,\det\mathbf{B} = \det(\mathbf{AB})$$
sowie
$$\det\mathbf{A}\,\det\mathbf{B} = \det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det\mathbf{B}\,\det\mathbf{A}$$
- 10)
$$\det\mathbf{A}^T = \det\mathbf{A}$$

Berechnung von Determinanten

Schlüsseleigenschaft zur Berechnung von Determinanten ist Punkt 8), da man ja mittels Eigenschaft 7) jede Determinante auf Dreiecksform bringen kann. Betrachten wir ein 3×3 Beispiel, das wir als "Probe" zunächst mittels des Sarrus'schen Schemas ausrechnen:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \\ -3 & 2 \end{matrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 5 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) \cdot 2 - (-1) \cdot 5 \cdot 1 = 38$$

Und jetzt gleich nochmals indem wir die Determinante mit Schritten, die völlig analog zur Reihenreduktion sind, auf Dreiecksform bringen:

II. Reihe $- 5 \times$ I. Reihe, III. Reihe $+ 3 \times$ I. Reihe:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix} =$$

III. Reihe $+ 1/7 \times$ II. Reihe

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 38/7 \end{vmatrix} =$$

Produkt der Hauptdiagonalelemente

$$= 1 \cdot 7 \cdot \frac{38}{7} = 38$$

Determinante und Inverse einer Matrix

Eine weitere ganz wichtige Eigenschaft von Determinaten ist 9). Daraus kann man sofort einen Zusammenhang zur inversen Matrix bilden. Soferne die inverse Matrix existiert gilt doch

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$$

Somit gilt für die Determinanten

$$\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}) = \det(\boldsymbol{E}) = 1$$

(Die Determinante der Einheitsmatrix ist wegen 8) gleich eins!) Weiters gilt aber (wegen 9) auch

$$\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}) = 1 = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{A}^{-1}) \qquad (*)$$

Sei $\det(\boldsymbol{A}) = a$, so folgt daraus erstens, daß $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} = \frac{1}{a}$ ist!

Weiters sieht man aber auch, daß die Determinante einer Matrix, zu der die Inverse existiert, *nicht gleich null sein kann!*. Somit ist $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ die Voraussetzung, daß zu **A** die Inverse existiert!

Anmerkungen zu Gleichungssystemen

Eine wichtige Anwendung von Matrizen (und Determinanten) sind Gleichungssyteme der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1n}\,x_n & = & d_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2n}\,x_n & = & d_2 \\ \dots & & & & & & & & \\ a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{nn}\,x_n & = & d_n \end{array}$$

(Wir beschränken uns auf den Fall, daß die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der Unbekannten ist.) Ein derartiges Gleichungssystem läßt sich vorteilhafter Weise auch in Matrixnotation schreiben.

$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{d}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}$$

Das gezeigte System ist *inhomogen*. Ist der Vektor $\vec{d}$ der Nullvektor, d.h., hat das System die Form

$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{0}$$

so spricht man von einem *homogenen* System.

Aus Zeitgründen ist eine systematische Behandlung (wann sind derartige Systeme wie lösbar) nicht möglich. Die im folgenden gezeigten Spezialfälle wurden ausgewählt um entweder Anwendungen von Matrixrechnung zu demonstrieren oder weil sie als Grundlagen später benötigt werden.

Eindeutig lösbare inhomogene Gleichungssysteme

Ein inhomogenes Gleichungssystem

$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{d}$$

ist genau dann *eindeutig* lösbar, wenn **A** invertierbar ist ($\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$). In diesem Fall gilt ja

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\vec{x} = \boldsymbol{E}\vec{x} = \vec{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\vec{d}$$

In der Praxis braucht $\boldsymbol{A}^{-1}$ nicht einmal explizit bestimmt werden. Man formt durch Reihenreduktion **A** Richtung Einheitsmatrix **E** um, und wendet die gleichen Operationen auf $\vec{d}$ an. Somit hat man am Ende $\boldsymbol{A}^{-1}\vec{d}$ berechnet. Beispiel: Zu lösen sei das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 6 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array}$$

Um die Reihenreduktion durchzuführen, schreibt man die Koeffizientenmatrix, erweitert um den Vektor $\vec{d}$ an. In unserem Beispiel heißt das

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & -1 & 6 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Eindeutig lösbare inhomogene Gleichungssysteme — Reihenreduktion

II. Reihe $-5\times$ I. Reihe, III. Reihe $+3\times$ I. Reihe

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -11 & -19 \\ 0 & -1 & 7 & 19 \end{array}\right)$$

III. Reihe $+1/7\times$ II. Reihe

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -11 & -19 \\ 0 & 0 & 38/7 & 114/7 \end{array}\right)$$

III. Reihe $\times 7/38$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -11 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

II. Reihe $+11\times$ III. Reihe

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

II. Reihe $\times 1/7$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Eindeutig lösbare inhomogene Gleichungssysteme — Reihenreduktion

I. Reihe $+$ II. Reihe $-2\times$ III. Reihe

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

womit wir das Ergebnis $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ aus der rechten Spalte des obigen Schemas ablesen können.

Anmerkung: Man weiss natürlich i.a. nicht im voraus, ob die Koeffizientenmatrix invertierbar ist. Man beginnt immer mit Reihenreduktion wie gezeigt, ob die Gleichung eindeutig lösbar ist zeigt sich im Laufe der Reihenreduktion von selbst (eine Reihe der Koeffizientenmatrix enthält plötzlich nur Nullen!). Wir überspringen die detaillierte Behandlung, was in solchen Fällen zu tun ist, und wenden uns homogenen Gleichungssystemen zu.

Homogene Gleichungssysteme

Wir suchen eine Lösung des Gleichungssystems

$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{0} \qquad (*)$$

1. Fall: A ist invertierbar ($\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$). In diesem Fall findet man

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\vec{0} = \vec{0}$$

Es gibt zwar eine eindeutige Lösung; diese ist jedoch trivial, d.h., der Nullvektor!

2. Fall: A ist *nicht* invertierbar ($\det(\boldsymbol{A}) = 0$). Wie folgendes Beispiel zeigt, gibt es in diesem Falle Vektoren $\vec{x}$, die Gl. (*****) lösen.

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 0 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 11x_3 & = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir wenden Reihenreduktion (wie im inhomogenen Beispiel) auf die erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -11 & 0 \end{array} \right)$$

an

Homogene Gleichungssysteme — Beispiel $\det(\boldsymbol{A}) = 0$

II. Reihe $-2\times$ I. Reihe, III. Reihe $+$ I. Reihe

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 0 \end{array}\right)$$

III. Reihe $+5/3\times$ II. Reihe

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \det(\boldsymbol{A}) = 0$. Die obige erweiterte Matrix ist aber äquivalent zu:

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = 0 \\ & & -3x_2 & + & 9x_3 & = 0 \end{array}$$

Daraus folgt aber sofort, daß $x_2 = 3x_3$ und $x_1 = -2x_3$. Der Wert von x_3 kann frei gewählt werden. Sei $x_3 = \lambda$, so ist $x_1 = -2\lambda$ und $x_2 = 3\lambda$. Die urspüngliche homogene Gleichung ist also für alle Vektoren

$$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt, wovon Sie sich durch Einsetzen leicht überzeugen können.

Tatsächlich gilt ganz allgemein: **Homogene Gleichungssysteme $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{0}$ haben genau dann eine nichttriviale Lösung für $\vec{x}$, wenn $\det(\boldsymbol{A}) = 0$**

Anmerkungen zu $\boldsymbol{A}\vec{x}$

Wir haben eben einige Aspekte des Lösens von Gleichungen der Form $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{0}$ bzw. $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{d}$ betrachtet. Gesucht war jedesmal ein unbekannter Vektor $\vec{x}$, der die Gleichung erfüllt. Im folgenden wenden wir uns der Frage zu, was der Ausdruck $\boldsymbol{A}\vec{x}$ für bekanntes **A** und $\vec{x}$ eigentlich bedeutet, d.h., was passiert mit $\vec{x}$ wenn man **A** "einwirken" läßt.

Um das zu illustrieren, betrachten wir ein zweidimensionales Problem, und multiplizieren den Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$. Man findet

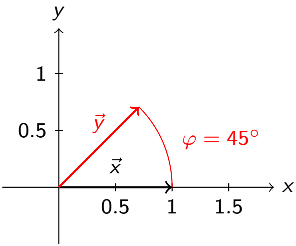
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \vec{y}$$

Der Ausgangsvektor $\vec{x}$ entspricht dem Einheitsvektor entlang der x-Achse eines kartesischen Koordinatensystems, der Endvektor $\vec{y}$ hingegen liegt auf der 45° Achse. Beide Vektoren haben die Länge eins, d.h., $|\vec{x}| = |\vec{y}| = 1$. Multiplikation (von links) mit obiger Matrix **A** führt daher zu einer Rotation des Vektors $\vec{x}$ um 45° gegen den Uhrzeigersinn.

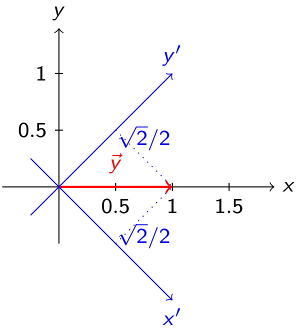
Anmerkungen zu $\boldsymbol{A}\vec{x}$

Zur Illustration die graphische Darstellung:



Anmerkungen zu $\boldsymbol{A}\vec{x}$

Zur Illustration die graphische Darstellung:



Es ist aber auch eine andere Sichtweise möglich. In blau ist ein um -45° gedrehtes Koordinatensystem (Achsen x' und y') gezeigt. In diesem liegt der Vektor $\vec{y}$ deckungsgleich über dem Ausgangsvektor $\vec{x}$ und hat in Bezug auf die neuen Achsen Komponenten $(\sqrt{2}/2\ \sqrt{2}/2)$. Die Abbildung zeigt somit, daß die Transformation auch als Drehung des zu Grunde liegenden Koordinatensystems aufgefasst werden kann.

Anmerkungen zu $\boldsymbol{A}\vec{x}$

Die Beispielmatrix, die wir bis jetzt verwendet haben, ist der Spezialfall $\varphi = 45^\circ$ der *Rotations*matrix

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

R dreht einen Vektor um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn (bzw. das Referenzkoordinatensystem im Uhrzeigersinn).

Wenn schon Rotationsmatrizen erwähnt werden, sei auf zwei Eigenschaften hingewiesen. (1) $\det(\boldsymbol{R}) = +1$, und (2) $\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}^{-1}$, d.h., $\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{E}$. Eigenschaft (1) spiegelt wider, daß Transformation mit **R** (=Rotation) die Länge des transformierten Vektors unverändert läßt. Matrizen mit Eigenschaft (2) werden auch als *orthogonale* Matrizen bezeichnet.†

Ganz allgemein entspricht Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix (von links) einer Transformation des Ausgangsvektors; Transformationen von Vektoren (bzw. Koordinatensystemen) sind eine wichtige Anwendung von Matrizen.

† Gilt für eine Matrix mit komplexen Elementen $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{-1}$, d.h., daß die adjungierte Matrix gleich der inversen Matrix ist, so bezeichnet man die Matrix **A** als *unitär*. Für rein reelle Matrizen sind die Begriffe orthogonal und unitär äquivalent.

Eigenwerte, Eigenvektoren

Wir haben eben gesehen, daß der Ausdruck $\boldsymbol{A}\vec{x}$ eine Transformation des Vektors $\vec{x}$ darstellt, wobei die Details der Transformation von **A** abhängen. Im Folgenden beschäftigen wir uns mit folgender Frage: Gibt es zu einer gegebenen (quadratischen) Matrix **A** Vektoren $\vec{x}$, die bei Einwirkung von **A** nur ihre Länge, nicht aber die Richtung ändern?[‡] Anders ausgedrückt suchen wir Lösungen folgender Gleichung:

$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \qquad (*)$$

Die unbekannten Größen sind einerseits λ, andererseits für ein gefundenes λ der oder die passenden Vektoren $\vec{x}$. Man bezeichnet λ als *Eigenwert*, die zu λ passenden Vektoren als *Eigenvektoren*. Gleichung (*) wird auch als *Eigenwertproblem* bzw. als *Eigensystem* bezeichnet.[§] Der Eigenwert λ kann übrigens selbst bei rein reellen Matrizen komplex sein.

Im Folgenden wird versucht, die Theorie halbwegs allgemein zu präsentieren, bei den praktischen Beispielen beschränken wir uns aber auf 2×2 Probleme.

[‡] Da λ negativ sein kann, ist Änderung des Richtungssinns (der Orientierung) zugelassen!

[§] Selbst auf englisch spricht man von "eigenvalue" und "eigenvector".

Das Eigenwertproblem

Die Aufgabe ist im Prinzip überhaupt nicht schwierig, der einzige Trick besteht darin, $\lambda\vec{x}$ als $\lambda\boldsymbol{E}\vec{x}$ zu schreiben, d.h.,

$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} = \lambda\boldsymbol{E}\vec{x}$$

was sich zu

$$\boldsymbol{A}\vec{x} - \lambda\boldsymbol{E}\vec{x} = (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\,\vec{x} = \vec{0}$$

umformen lässt. In dieser Form geschrieben reduziert sich die Aufgabe auf die Lösung eines homogenen Gleichungssystems.

Wie wir aber vor kurzem gesehen haben, hat ein homogenes Gleichungssystem $\boldsymbol{B}\vec{x}$ nur dann nichttriviale Lösungen, wenn $\det(\boldsymbol{B}) = 0$. Um zu sehen, ob ein Eigenwertproblem eine Lösung hat, müssen wir also die Gleichung

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

zu lösen versuchen. Die λs, für die $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})$ null wird, sind die gesuchten Eigenwerte. $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})$ wird vor allem in der englischsprachigen Literatur als "secular determinant" (Säkulardeterminante) bezeichnet. Es sollte klar sein, daß das Ausrechnen der Determinante auf eine Polynomgleichung n-ten Grades führt, diese wird oft als *charakteristische* Gleichung bezeichnet.

Berechnung von Eigenwerten — ein Beispiel

Wir suchen die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Gemäß dem allgemeinen Ansatz haben wir

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

zu berechnen. Eine kurze Rechnung ergibt

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - (-1)3 = -4 + 2\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 3 = \lambda^2 - 1 = 0$$

mit Lösungen $\lambda_1 = +1$ und $\lambda_2 = -1$.

Eigenvektoren

Hat man die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$[¶] gefunden, so kann man die dazugehörigen Eigenvektoren ermitteln, indem man mit den konkreten Werten in die Ausgangsgleichung einsetzt:

$$\boldsymbol{A}\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i \qquad \Leftrightarrow \qquad (\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{E})\,\vec{x}_i = \vec{0} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

NB: Zu diesem Zeitpunkt kennen wir die λ_i; gesucht sind der zu λ_i gehörige Eigenvektor $\vec{x}_i$.

Machen wir mit unserem Beispiel weiter: Wir kennen bereits die zu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ gehörigen Eigenwerte $\lambda_1 = +1$ und $\lambda_2 = -1$.

$\boldsymbol{\lambda_1 = +1}$: Aus $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = +1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ folgt

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - (+1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 3 \\ -1 & -2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ich glaube, daß Sie auch ohne Reihenreduktion sehen, daß das resultierende Gleichungssystem redundant ist (II. Zeile $= -I$. Zeile) und sich auf die Beziehung $x + 3y = 0$ reduziert. Es folgt $x = -3y$, und für z.B. $y = 1$ ergibt sich $x = -3$. Somit ist $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu $\lambda_1 = +1$. Führen Sie die Probe durch!

[¶] Eine $n \times n$ Säkulardeterminante entspricht einem Polynom n-ten Grades, welches maximal n unterschiedliche Nullstellen haben kann. Eine $n \times n$ Matrix kann durch zusammenfallende Lösungen $< n$ Eigenwerte haben! Auf die daraus resultierenden leichten Komplikationen können wir aus Zeitgründen nicht eingehen.

Eigenvektoren

$\boldsymbol{\lambda_2 = -1}$**:** Die analoge Rechnung mit $\lambda_2 = -1$ führt auf

$$\begin{pmatrix} 2+1 & 3 \\ -1 & -2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw. auf $3x + 3y = 0 \Leftrightarrow x = -y$. Somit ist z.B. (mit $y = -1$) $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu $\lambda_2 = -1$.

Durch das Beispiel sollte klar geworden sein, daß wenn $\vec{x}_i$ ein Eigenvektor zu λ_i ist, $\alpha\vec{x}_i$ ebenfalls ein Eigenvektor zu λ_i ist. Im obigen Beispiel wären $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. allgemein $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren zu $\lambda_2 = -1$.

Es ist manchmal üblich, Eigenvektoren auf die Länge eins zu normieren. Dies würde in unserem Beispiel auf Eigenvektoren $\vec{x}_1^0 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ führen (bzw. auf (-1) mal diese Vektoren).

Es ist manchmal nützlich, die Eigenvektoren einer Matrix (*geschrieben als Spaltenvektoren*) als Spalten einer Matrix $\mathbf{X}$ zu betrachten, d.h.

$$\boldsymbol{X} = (\vec{x}_1 \;\; \vec{x}_2 \;\; \dots \;\; \vec{x}_n)$$

In unserem Beispiel:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisieren einer Matrix

In Kürze ein paar Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren bzw. damit zusammenhängende Eigenschaften von Matrizen und Determinanten: Mit der eben eingeführten Notation **X** und einer Matrix **D**, einer Diagonalmatrix mit den n Eigenwerten als Elementen der Hauptdiagonale gilt

$$\boldsymbol{AX} = (\boldsymbol{A}\vec{x}_1 \;\; \boldsymbol{A}\vec{x}_2 \;\; \dots \;\; \boldsymbol{A}\vec{x}_n) = \left(\lambda_1\vec{x}_1 \;\; \lambda_2\vec{x}_2 \;\; \dots \;\; \vec{\lambda}_n x_n\right) = \boldsymbol{XD}$$

(Achtung auf die Reihenfolge der Multiplikation in der letzten Umformung — die $\vec{x}_i$ sind die *Spalten* von **X**!)

Test an unserem Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -6+3 & 2-3 \\ 3-2 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1\,(-1) \\ 1 & -1\,(-1) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vorausgesetzt daß **X** invertierbar ist, folgt aus

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XD}$$

durch Multiplikation von links mit $\boldsymbol{X}^{-1}$

$$\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{XD} = \boldsymbol{D}$$

Ähnlichkeitstransformationen

Der eben abgeleitete Zusammenhang ist ein Spezialfall von Beziehungen zwischen Matrizen. Existiert zwischen drei Matrizen der Zusammenhang:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} \qquad (*)$$

(Invertierbarkeit von **C** vorausgesetzt), so spricht man von einer *Ähnlichkeitstransformation*.

Aus den Rechenregeln für Matrixmultiplikation und Eigenschaften von Determinanten gilt im Falle von (*)

$$\det(\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}) \qquad (1)$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) \qquad (2)$$

Hierbei bedeutet tr() die Summe der Elemente der Hauptdiagonalen (englisch "trace", deutsch *Spur*). (1) folgt unmittelbar aus Eigenschaft 9) von Determinanten. Für die Spur eines Matrixprodukts gilt ebenfalls $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$; daraus folgt sofort (2)[‖]

(1) und (2) gelten also auch für $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, woraus weiters folgt, daß

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{D}) = \sum_i^n \lambda_i \quad \text{(Summe der Eigenwerte)}$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{D}) = \prod_i^n \lambda_i \quad \text{(Produkt der Eigenwerte)}$$

Bitte testen Sie die Gültigkeit dieser Beziehungen für unser 2×2 *Beispiel!*

[‖] $\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$

Eigenwerte/-vektoren symmetrischer, reeller Matrizen

In den Naturwissenschaften sind oft Eigenwerte und -vektoren von reellen, symmetrischen Matrizen ($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$) sowie komplexen, hermiteschen Matrizen ($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*$) von Interesse. Diese Matrizen haben *immer reelle* Eigenwerte. Wir studieren die Eigenschaften solcher Eigensysteme am Beispiel der 2×2 symmetrischen Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

In Schnellform Eigenwerte und Eigenvektoren:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x + y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte/-vektoren symmetrischer, reeller Matrizen

- Die beiden Eigenvektoren stehen normal zueinander, $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = 0$ (nachrechnen!). Allgemein gilt: Die zu unterschiedlichen Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren einer reellen, symmetrischen Matrix sind *orthogonal* (= ihr Skalarprodukt verschwindet!)
- Allgemein gilt für eine reelle, symmetrische $n \times n$ Matrix, daß alle Eigenwerte reell sind. Natürlich kann es zusammenfallende Eigenwerte geben. Zählt man Eigenwerte entsprechend ihrer Vielfachheit, so gibt es genau n Eigenwerte.
- Zu einem p-fachen Eigenwert gibt es immer p linear unabhängige Eigenvektoren.** Diese können durch geeignete Verfahren in einen Satz von p orthogonalen Vektoren umgeformt werden.
- Bildet man die Matrix **X** der *normierten* (und ggf. orthogonalisierten) Eigenvektoren†† (!!), so ist diese orthogonal, d.h., $\boldsymbol{X}^T = \boldsymbol{X}^{-1}$. Unser Beispiel:

  Normierte Eigenvektoren: $\vec{x}_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

  $$\boldsymbol{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{X}^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{(Nachrechnen!)}$$

- Eine symmetrische Matrix ist daher besonders leicht auf Diagonalform

  $$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \dots\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots\\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots\\ & \dots & \dots & \end{pmatrix}$$ zu bringen: $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$

** Details führen hier zu weit — für beliebige Matrizen gilt das nicht!

†† = Vektoren mit Länge eins!

Ein Anwendungsbeispiel

Ganz zum Abschluß ein Beispiel, das eine Anwendung von Eigensystemen in einem scheinbar ganz anderem Bereich der Mathematik zeigt, dem Lösen von Differentialgleichungssystemen. Bitte überzeugen Sie sich durch einsetzen, daß

$$\begin{array}{rcrcr} y_1' & = & 2y_1 & + & 3y_2 \\ y_2' & = & -y_1 & - & 2y_2 \end{array}$$

die Lösungen $y_1 = -3\alpha e^x + \beta e^{-x}$, $y_2 = \alpha e^x - \beta e^{-x}$ hat. (α, β sind die Integrationskonstanten)

Da wir jetzt Matrixmethoden zur Lösung anwenden wollen, müssen wir als erstes unser Problem in Matrixschreibweise bringen. Dazu formen wir den Vektor

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{rcr} -3\alpha e^x & + & \beta e^{-x} \\ \alpha e^x & - & \beta e^{-x} \end{array} \right) = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} = \alpha \boldsymbol{Y}_1 + \beta \boldsymbol{Y}_2$$

Zusammen mit der Koeffizientenmatrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

läßt sich unsere Aufgabe als

$$\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} \qquad (*)$$

schreiben.
Überprüfen Sie das und überzeugen Sie sich, daß $\boldsymbol{Y}_1$ und $\boldsymbol{Y}_2$ für sich allein ebenfalls (*) erfüllen.

Lösen eines 2×2 DGL Systems

Um

$$\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} \qquad (*)$$

zu lösen, müssen wir daher geeignete $\boldsymbol{Y}_i$ finden, die (*) lösen. Von unserem 2×2 Beispiel wissen wir ja, wie die $\boldsymbol{Y}_i$ aussehen und starten mit folgendem Ansatz für $\boldsymbol{Y}_i$, wobei wir den Index i “fallen lassen”:

$$\boldsymbol{Y} = \vec{c}\, e^{\lambda x},$$

(NB: $\vec{c}$ ist ein konstanter Vektor, dessen Koeffizienten in Abhängigkeit von λ zu bestimmen sind!) Somit ist

$$\boldsymbol{Y}' = \vec{c}\lambda\, e^{\lambda x}$$

Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung findet man

$$\lambda \vec{c}\, e^{\lambda x} = \boldsymbol{A}\vec{c} e^{\lambda x} \Big| \cdot \frac{1}{e^{\lambda x}}$$

was sich auch als

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\vec{c} = \vec{0}$$

schreiben läßt. Damit $\vec{c}$ andere Lösungen als den Nullvektor hat, muß $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) \neq 0$ — wir sind bei einer Eigenwertaufgabe angelangt. Für jedes λ_i erhalten wir den Eigenvektor $\vec{c}_i$, sowie eine Funktion $\boldsymbol{Y}_i$, die (*) löst.

An dieser Stelle müßte jetzt das Eigenwertproblem für unser Beispiel gelöst werden; in unserem speziellen Fall kennen wir jedoch bereits die Lösung.

Lösen eines 2×2 DGL Systems

$$\lambda_1 = +1, \quad \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = -1, \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit finden wir aber zwei Vektoren (von Funktionen) $\boldsymbol{Y}_1$ und $\boldsymbol{Y}_2$, die beide $\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$ erfüllen:

$$\boldsymbol{Y}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+x} \qquad \boldsymbol{Y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

Wenn aber sowohl $\boldsymbol{Y}_1$ als auch $\boldsymbol{Y}_2$ die Ausgangsgleichung erfüllen, so wird diese auch von

$$\boldsymbol{Y} = \alpha \boldsymbol{Y}_1 + \beta \boldsymbol{Y}_2 = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+x} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

erfüllt. Dies ist die allgemeine Lösung des DGL-systems, wie Sie sich durch Einsetzen überzeugen können.

Lösen eines 2×2 DGL Systems

$$\lambda_1 = +1, \quad \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = -1, \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit finden wir aber zwei Vektoren (von Funktionen) $\boldsymbol{Y}_1$ und $\boldsymbol{Y}_2$, die beide $\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{AY}$ erfüllen:

$$\boldsymbol{Y}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+x} \qquad \boldsymbol{Y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

Wenn aber sowohl $\boldsymbol{Y}_1$ als auch $\boldsymbol{Y}_2$ die Ausgangsgleichung erfüllen, so wird diese auch von

$$\boldsymbol{Y} = \alpha \boldsymbol{Y}_1 + \beta \boldsymbol{Y}_2 = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+x} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

erfüllt. Dies ist die allgemeine Lösung des DGL-systems, wie Sie sich durch Einsetzen überzeugen können.

Das Lösen von DGL-Systemen mittels Eigenwerten/-vektoren dient als Illustration der Anwendung von Matrixtechniken. Es ist *nicht* Prüfungsstoff, das *Lösen von* 2×2 *DGL-Systemen auf "herkömmliche Art und Weise hingegen schon!*

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.
This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.
We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "**Document**", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "**you**". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.
A "**Modified Version**" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.
A "**Secondary Section**" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.
The "**Invariant Sections**" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.
The "**Cover Texts**" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A “**Transparent**” copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not “Transparent” is called “**Opaque**”.
Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.
The “**Title Page**” means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, “Title Page” means the text near the most prominent appearance of the work’s title, preceding the beginning of the body of the text.
A section “**Entitled XYZ**” means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as “**Acknowledgements**”, “**Dedications**”, “**Endorsements**”, or “**History**”.) To “**Preserve the Title**” of such a section when you modify the Document means that it remains a section “Entitled XYZ” according to this definition.
The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.
You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document’s license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.
If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.
It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.

C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.

D. Preserve all the copyright notices of the Document.

E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.

F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.

G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

H. Include an unaltered copy of this License.

I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.

J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.

K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.

L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.

M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.

N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.

O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.
You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties–for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.
You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.
The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.
The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.
In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.
You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with ... Texts." line with this:

with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.