Funktionen mehrerer Veränderlicher

Stefan Boresch

Department of Computational Biological Chemistry
Faculty of Chemistry
University of Vienna

November 30, 2009

Copyright (c) 2009 Stefan Boresch

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

Funktionen mehrerer Veränderlicher — Motivation

Funktionelle Abhängigkeiten in der realen Welt beschränken sich selten auf eine Veränderliche/Variable. Denken Sie an

- das ideale Gasgesetz $pV = nRT$, Somit gilt

  $$p = p(n, V, T) = nRT/V \quad V = V(n, p, T) = nRT/p \quad T = T(n, p, V) = pV/nR$$

- Reaktionsgeschwindigkeiten. Diese hängen oft von den Konzentrationen mehrerer/aller beteiligter Substanzen, sowie von Druck und Temperatur ab.
- die (innere) Energie eines Moleküls bzw. eines Ensembles von Molekülen. Es seien (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \dots, N$ die x-, y-, z-Koordinaten aller Atome des Systems. Dann ist die Energie gegeben durch

  $$U = U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N)$$

Funktionen mehrerer Veränderlicher — Motivation

Funktionelle Abhängigkeiten in der realen Welt beschränken sich selten auf eine Veränderliche/Variable. Denken Sie an

- das ideale Gasgesetz $pV = nRT$, Somit gilt

  $$p = p(n, V, T) = nRT/V \quad V = V(n, p, T) = nRT/p \quad T = T(n, p, V) = pV/nR$$

- Reaktionsgeschwindigkeiten. Diese hängen oft von den Konzentrationen mehrerer/aller beteiligter Substanzen, sowie von Druck und Temperatur ab.
- die (innere) Energie eines Moleküls bzw. eines Ensembles von Molekülen. Es seien (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, N$ die x-, y-, z-Koordinaten aller Atome des Systems. Dann ist die Energie gegeben durch

  $$U = U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_N, y_N, z_N)$$

Wir wollen im folgenden einige grundlegende Eigenschaften mehrdimensionaler Funktionen studieren, genauer gesagt Funktionen die aus n Variablen *einen* Funktionswert liefern. Die meisten dieser Eigenschaften kann man bereits für $n = 2$ illustrieren, drei- und mehrdimensionale Funktionen werden in der Regel nur erwähnt, wenn es Besonderheiten im Vergleich zum zweidimensionalen Fall gibt.

Funktionen mehrerer Veränderlicher — Beispiele

Es sei

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

dann ist z.B. $f(x = 0, y = 0) = 0^4 + 0^4 - 4 \cdot 0 \cdot 0 + 1 = 1$ oder $f(x = 1, y = 2) = 1^4 + 2^4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 + 1 = 10$.

Funktionen mehrerer Veränderlicher — Beispiele

Es sei

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

dann ist z.B. $f(x = 0, y = 0) = 0^4 + 0^4 - 4 \cdot 0 \cdot 0 + 1 = 1$ oder
$f(x = 1, y = 2) = 1^4 + 2^4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 + 1 = 10$.

Für

$$g(x, y) = \sin x \, \cos y$$

ist $g(x = \pi/2, y = \pi/4) = \sin(\pi/2)\,\cos(\pi/4) = 1 \cdot \sqrt{2}/2 = \sqrt{2}/2$

Funktionen mehrerer Veränderlicher — Beispiele

Es sei

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

dann ist z.B. $f(x = 0, y = 0) = 0^4 + 0^4 - 4 \cdot 0 \cdot 0 + 1 = 1$ oder $f(x = 1, y = 2) = 1^4 + 2^4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 + 1 = 10$.

Für

$$g(x, y) = \sin x \cos y$$

ist $g(x = \pi/2, y = \pi/4) = \sin(\pi/2) \cos(\pi/4) = 1 \cdot \sqrt{2}/2 = \sqrt{2}/2$

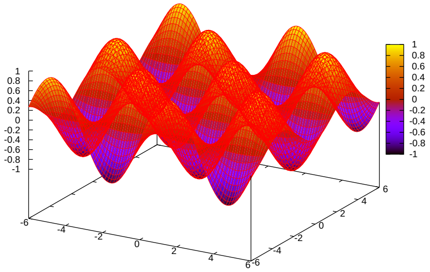
Für

$$h(x, y, z, t) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - t^2}$$

ist $h(1, 2, 3, 2) = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 - 2^2} = \sqrt{10}$.

Graphische Darstellung von Funktionen zweier Veränderlicher

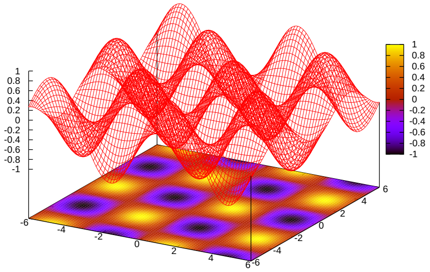
Die graphische Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher ist i.a. nicht möglich. Einzig Funktionen von zwei Variablen können dargestellt werden, indem man die 3. Dimension zu Hilfe nimmt.



Dies ist hier für $f(x) = \sin x \cos x$ illustriert.

Graphische Darstellung von Funktionen zweier Veränderlicher

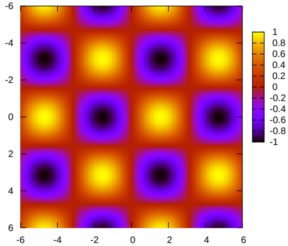
Die graphische Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher ist i.a. nicht möglich. Einzig Funktionen von zwei Variablen können dargestellt werden, indem man die 3. Dimension zu Hilfe nimmt.



Projeziert man den Funktionswert zurück auf die $x - y$ Ebene und verbindet Bereiche gleichen Funktionswerts so erhält man sogenannte Konturdiagramme — siehe Abbildung.

Graphische Darstellung von Funktionen zweier Veränderlicher

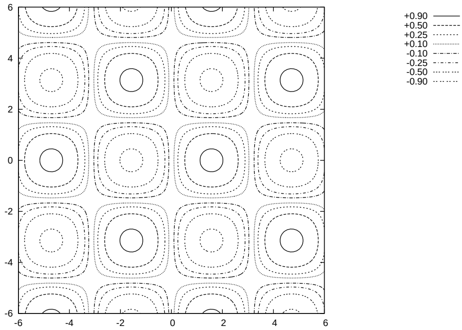
Die graphische Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher ist i.a. nicht möglich. Einzig Funktionen von zwei Variablen können dargestellt werden, indem man die 3. Dimension zu Hilfe nimmt.



Normalerweise stellt man natürlich nur die $x - y$ Ebene in dieser Weise dar.

Graphische Darstellung von Funktionen zweier Veränderlicher

Die graphische Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher ist i.a. nicht möglich. Einzig Funktionen von zwei Variablen können dargestellt werden, indem man die 3. Dimension zu Hilfe nimmt.



Persönlich finde ich die altmodische Form mit *Isokonturlinien* ("Höhenschichtlinien") am informativsten, wenngleich etwas Übung im Lesen derartiger Diagramme notwendig ist.

Anmerkungen zu Definitionsmenge, Grenzwert, Stetigkeit etc.

Definitionsmenge:

Wie für Funktionen einer Veränderlichen sind x und y Werte ausgeschlossen, die auf verbotene Operationen bzw. komplexe Funktionswerte führen würden. Darüberhinaus sind natürlich auch alle Kombinationen von x und y verboten, die zu derartigen Problemen führen würden. Beispiele:

- $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ Die Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^2$ *ohne* den Punkt $(0,0)$
- $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ Die Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^2$ *ohne* die Punkte die auf der Geraden $x = -y$ liegen.
- $f(x,y) = \sqrt{x-y}$ Die Definitionsmenge D enthält alle Punkte aus $\mathbb{R}^2$, für die $x > y$ ist.

Darüberhinaus kann man die Definitionsmenge auf bekannte geometrische Objekte einengen. Z.B.

- Die Bedingung $x^2 + y^2 \leq r^2$ schränkt die Definitionsmenge einer zweidimensionalen Funktion auf eine Kreisfläche mit Radius r um den Ursprung ein.
- $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ ist das dreidimensionale Pendant (Definitionsmenge enthält alle Punkte einer Kugel mit Radius R, zentriert um den Ursprung).

Anmerkungen zu Definitionsmenge, Grenzwert, Stetigkeit etc.

Grenzwert:

Es gilt in direkter Verallgemeinerung der bekannten Definition für eine Veränderliche:

Eine Funktion von zwei Veränderlichen $z = f(x, y)$ besitzt einen Grenzwert A für das Wertesystem $x = a$, $y = b$, wenn sich die Funktion $f(x, y)$ bei beliebiger Annäherung von x gegen a und von y gegen b dem Wert A beliebig nähert. Man schreibt dann:

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow a \\ y \longrightarrow b}} f(x, y) = A$$

Dabei braucht die Funktion für das Wertesystem $x = a$, $y = b$, d.h., im Punkt (a, b) selbst, den Wert A weder anzunehmen noch definiert zu sein.

Hier hinzuzufügen wäre nur noch, daß insbesondere die Richtung der Annäherung keinen Unterschied machen darf, d.h., es muß egal sein, ob ich zuerst $x \longrightarrow a$, danach $y \longrightarrow b$ durchführe oder umgekehrt, bzw. ob ich x und y simultan an a und b annähere.

Anmerkungen zu Definitionsmenge, Grenzwert, Stetigkeit etc.

Grenzwert:

Es gilt in direkter Verallgemeinerung der bekannten Definition für eine Veränderliche:

Eine Funktion von zwei Veränderlichen $z = f(x, y)$ besitzt einen Grenzwert A für das Wertesystem $x = a$, $y = b$, wenn sich die Funktion $f(x, y)$ bei beliebiger Annäherung von x gegen a und von y gegen b dem Wert A beliebig nähert. Man schreibt dann:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A$$

Dabei braucht die Funktion für das Wertesystem $x = a$, $y = b$, d.h., im Punkt (a, b) selbst, den Wert A weder anzunehmen noch definiert zu sein.

Hier hinzuzufügen wäre nur noch, daß insbesondere die Richtung der Annäherung keinen Unterschied machen darf, d.h., es muß egal sein, ob ich zuerst $x \to a$, danach $y \to b$ durchführe oder umgekehrt, bzw. ob ich x und y simultan an a und b annähere. Daß dies keine Haarspalterei ist, möge folgendes Beispiel illustrieren:

$f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Wir interessieren uns für den Grenzwert $x \to 0$, $y \to 0$ (der Definitionslücke der Funktion!).

i) Wir nähern uns $(0, 0)$ entlang der x-Achse ($y = 0$). Die Funktion $f(x, y = 0)$ ist aber $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$, somit

$$f(x, y) \to 1 \quad \text{für} (x, y) \to (0, 0) \text{ entlang der } x\text{-Achse}$$

ii) Wir nähern uns $(0, 0)$ entlang der y-Achse ($x = 0$). Die Funktion $f(x = 0, y)$ ist aber $f(0, y) = -y^2/y^2 = -1$, somit

$$f(x, y) \to -1 \quad \text{für} (x, y) \to (0, 0) \text{ entlang der } y\text{-Achse}$$

In einem derartigen Fall existiert der gesuchte Grenzwert *nicht*!

Anmerkungen zu Definitionsmenge, Grenzwert, Stetigkeit etc.

Stetigkeit:

Es gilt wiederum in direkter Verallgemeinerung der Definition für eine Veränderliche:

Eine Funktion von zwei Veränderlichen $f(x,y)$ *wird an der Stelle* $x = a$, $y = b$, *d.h., im Punkt* (a,b), *stetig genannt, wenn 1. der Punkt* (a,b) *zur Definitionsmenge der Funktion gehört, wenn 2. der Grenzwert* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y)$ *existiert und 3.*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = f(a,b)$$

gilt.

Partielle Ableitungen — Hinführung

Erinnern Sie sich: Die Ableitung einer eindimensionalen Funktion gibt uns Auskunft, wie sich die Funktion ändert, wenn wir von x zu $x + h$ gehen (h beliebig klein). Logischerweise wäre äquivalente Information auch für mehrdimensionale Funktionen interessant. Das Problem dabei ist, daß ich selbst im zweidimensionalen Fall jetzt unendlich viele Kombinationen berücksichtigen müßte (z.B., nur x oder nur y wird vergrößert, oder x und y werden simultan vergrößert usw.).

Um vor lauter Wald nicht die Bäume aus den Augen zu verlieren, sollte man sich darauf besinnen, wie man ein derartiges Problem experimentell anginge: Man würde doch vermutlich (im zweidimensionalen Fall) zunächst die erste Variable konstant halten, und die Veränderung der Funktion als Funktion von ausschließlich der zweiten Variablen studieren. Danach würde man die zweite Variable konstant halten und die erste variieren.

Anders ausgedrückt betrachtet man also Differenzen der Form

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \qquad y \text{ konstant}$$

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad x \text{ konstant}$$

Partielle Ableitungen — Definition

Nun dividiert man

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$
$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

durch die jeweiligen Inkremente Δx bzw. Δy und betrachtet die Grenzwerte $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Partielle Ableitungen — Definition

Nun dividiert man

$$
\begin{gathered}
f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \\
f(x, y+\Delta y) - f(x,y)
\end{gathered}
$$

durch die jeweiligen Inkremente Δx bzw. Δy und betrachtet die Grenzwerte $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}
\end{aligned}
$$

Existieren die Grenzwerte, so bezeichnet man diese als die partiellen Ableitungen von $f(x,y)$ nach x bzw. y. Die Verallgemeinerung auf drei und mehr Veränderliche erfolgt in Analogie!

Partielle Ableitungen — Definition

Nun dividiert man

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$
$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

durch die jeweiligen Inkremente Δx bzw. Δy und betrachtet die Grenzwerte $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Existieren die Grenzwerte, so bezeichnet man diese als die partiellen Ableitungen von $f(x,y)$ nach x bzw. y. Die Verallgemeinerung auf drei und mehr Veränderliche erfolgt in Analogie!

Hinweise zur Schreibweise: Eine Kurzschreibweise für partielle Ableitungen besteht darin, daß man die Variable nach der abgeleitet wird als Subskript neben das Funktionssymbol stellt. Z.B.

$$f_x = \frac{\partial f(x,y,\ldots)}{\partial x} \qquad g_z = \frac{\partial g(x,y,z,\ldots)}{\partial z} \qquad \text{usw.}$$

Manchmal ist es umgekehrt wichtig nicht nur die Variable zu indizieren, nach der abgeleitet wird, sondern auch die Variablen hervorzuheben, die konstant gelassen werden. Es werde $h(u,v,w)$ partiell nach v abgeleitet. Man schreibt:

$$\left(\frac{\partial h(u,v,w)}{\partial v}\right)_{u,w} = h_v = \frac{\partial h(u,v,w)}{\partial v}$$

um die Rolle von v gegenüber u und w abzuheben.

Partielle Ableitungen — Praxis

Was heißt das nun konkret: Um $f(x, y)$ partiell nach x abzuleiten läßt man für y einen beliebigen Wert zu, welcher während der Ableitung (nach x) aber konstant gehalten wird. Man könnte formal schreiben $y = y_0$, und man leitet $f(x, y = y_0)$ nach x ab. Für ein beliebiges, aber konstantes $y = y_0$ reduziert sich aber $f(x, y = y_0) = f(x)$ auf eine Funktion von x, und man kann "ganz normal" differenzieren (alle uns bekannten Regeln gelten!).

D.h. also z.B. für $f(x, y) = x^2 \cos y$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial x^2 \cos y}{\partial x} = 2x \cos y$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial x^2 \cos y}{\partial y} = x^2(-\sin y) = -x^2 \sin y$$

Zur Verdeutlichung ist die Variable, nach der abgeleitet wird, in rot hervorgehoben, der "konstante" Teil hingegen ist grau.

Partielle Ableitungen — weitere Beispiele

1. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad f_y = 4y^3 - 4x$$

Achtung: Wenn Sie partiell nach x ableiten, verschwindet y^4, für $\partial/\partial y$ verschwindet x^4!

Partielle Ableitungen — weitere Beispiele

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad f_y = 4y^3 - 4x$$

Achtung: Wenn Sie partiell nach x ableiten, verschwindet y^4, für $\partial/\partial y$ verschwindet x^4!

2. $f(x,y) = x^2 e^{x^4 - 3y}$

$$f_x = 2xe^{x^4-3y} + x^2 e^{x^4-3y} 4x^3 = e^{x^4-3y}(4x^5 + 2x) \qquad f_y = x^2 e^{x^4-3y}(-3) = -3x^2 e^{x^4-3y}$$

In beiden partiellen Ableitungen wird die Kettenregel verwendet, für f_x kommt noch die Produktregel hinzu.

Partielle Ableitungen — weitere Beispiele

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad f_y = 4y^3 - 4x$$

Achtung: Wenn Sie partiell nach x ableiten, verschwindet y^4, für $\partial/\partial y$ verschwindet x^4!

2. $f(x,y) = x^2 e^{x^4 - 3y}$

$$f_x = 2xe^{x^4-3y} + x^2 e^{x^4-3y} 4x^3 = e^{x^4-3y}(4x^5 + 2x) \qquad f_y = x^2 e^{x^4-3y}(-3) = -3x^2 e^{x^4-3y}$$

In beiden partiellen Ableitungen wird die Kettenregel verwendet, für f_x kommt noch die Produktregel hinzu.

3. Für Funktionen von mehr als 2 Veränderlichen funktioniert alles analog:

$f(x,y,z,t) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - t^2}$

$$f_x = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)^{-1/2} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - t^2}}$$

$$f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - t^2}} \quad f_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - t^2}} \quad f_t = -\frac{t}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - t^2}}$$

Alle Variablen außer derjenigen, nach der abgeleitet wird, werden wie Konstanten behandelt.

Partielle Ableitungen — abschließende Bemerkungen

Die Mechanik des partiellen Ableitens unterscheidet sich in der Praxis nicht vom normalen Differenzieren. Dennoch gibt es Unterschiede. Der wichtigste ist vermutlich folgender. Wie wir beim Integrieren gesehen haben, darf man einen normalen Differentialquotienten df/dx wie einen Bruch behandeln (z.B. bei der Substitutionsmethode):

$$t = t(x) = x^2 - 1 \quad \frac{dt}{dx} = 2x \quad dx = \frac{dt}{2x}$$

Dies darf man bei einer partiellen Ableitung nicht!!!. Ein Ausdruck wie $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ bildet eine Einheit, die nicht in Bruchstücke (Zähler, Nenner) zerrissen werden darf. Um das zu illustrieren betrachten wir das ideale Gasgesetz (für 1 Mol) $pV = RT$, mit

$$p = p(n, V, T) = RT/V \quad V = V(n, p, T) = RT/p \quad T = T(n, p, V) = pV/R$$

Könnte man $\partial f/\partial x$ wie einen Bruch behandeln, so müßte sofort gelten:

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial V} = 1 \qquad \text{falsch!}$$

da sich Zähler und Nenner zyklisch kürzen.

Partielle Ableitungen — abschließende Bemerkungen II

Überprüfen (besser gesagt falsifizieren) wir

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial V} = 1 \qquad \text{falsch!}$$

durch Nachrechnen:

$$\frac{\partial V}{\partial T} = R/p$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = V/R$$

$$\frac{\partial p}{\partial V} = -RT/V^2$$

Somit

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial V} = \frac{R}{p}\frac{V}{R}\frac{(-RT)}{V^2} = -\frac{RT}{pV} = -1$$

(da aus $pV = RT$ folgt $pV/RT = +1$).

Kann man erklären warum Kürzen nicht erlaubt ist? Man darf nicht nur auf die Variable schauen, nach der abgeleitet wird, sondern muß auch auf die konstant gehaltenen Variablen sehen. Man hat ja

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad \frac{\partial T}{\partial p} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \quad \frac{\partial p}{\partial V} = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$$

und somit spielt z.B. T in der ersten und zweiten partiellen Ableitung eine unterschiedliche Rolle ...

Höhere partielle Ableitungen

Differenziert man eine partielle Ableitung nochmals, so kommt man zur zweiten partiellen Ableitung der Funktion. Für eine Funktion von zwei Veränderlichen gibt es jedoch zwei Möglichkeiten: (1) die erste Ableitung kann nach derselben Variablen nochmals abgeleitet werden ("reine" zweite Ableitung), oder (2) man kann die erste Ableitung nach der jeweils anderen Variablen ableiten ("gemischte" zweite Ableitung) Schematisch

$$
f(x,y) \quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{lcl}
\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \Rightarrow & \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) \end{array} \\[8ex]
\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} & \Rightarrow & \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \end{array}
\end{array}
$$

Für die reinen zweiten Ableitungen nach x bzw. y schreibt man $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f_{xx}$ bzw. $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f_{yy}$

Höhere partielle Ableitungen

Bei den gemischten zweiten (und höheren) Ableitungen muß man die Reihenfolge kenntlich machen. Wir schreiben[1]

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{xy} \qquad \text{zuerst nach } x \text{, dann nach } y$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f_{yx} \qquad \text{zuerst nach } y \text{, dann nach } x$$

Bemühen Sie sich nicht allzusehr, sich diese Regel(n) einzuprägen. Wir werden gleich sehen, daß dies in der Praxis ziemlich egal ist!

Alles analog für Funktionen mehrerer Veränderlicher: Es sei $h = h(x, y, z, t)$. Dann bedeutet $\dfrac{\partial^3 h}{\partial y^3} = h_{yyy}$ die (reine) dritte Ableitung von h nach y, und $\dfrac{\partial^4 h}{\partial x \partial y^2 \partial t} = h_{xyyt}$ bedeutet, daß h viermal partiell differenziert wird, und zwar zunächst nach x, danach zweimal nach y, und schließlich nach t.

[1] Dies wird nicht ganz einheitlich gehandhabt

Höhere partielle Ableitungen — Praxis

Schauen wir uns zunächst ein paar Beispiele an: 1. $f(x, y) = x^2 \cos y$

$$f_x = 2x \cos y, \qquad f_y = -x^2 \sin y$$

Differenziert man weiter, so erhält man

$$f_{xx} = 2 \cos y, \qquad f_{yy} = -x^2 \cos y, \qquad f_{xy} = -2x \sin y, \qquad f_{yx} = -2x \sin y$$

Interessant an dieser Funktion ist übrigens, daß die (reine) 3. Ableitung nach x verschwindet, während man nach y beliebig oft differenzieren kann ...

2. $f(x, y) = x^2 e^{x^4 - 3y}$

$$f_x = 2xe^{x^4-3y} + x^2 e^{x^4-3y} 4x^3 = e^{x^4-3y}(4x^5 + 2x) \qquad f_y = x^2 e^{x^4-3y}(-3) = -3x^2 e^{x^4-3y}$$

Differenziert man weiter, so erhält man

$$f_{xx} = (20x^4 + 2)e^{x^4-3y} + (4x^5 + 2x)e^{x^4-3y} 4x^3 = e^{x^4-3y}(16x^8 + 28x^4 + 2)$$

$$f_{yy} = -3x^2 e^{x^4-3y}(-3) = 9x^2 e^{x^4-3y}$$

$$f_{xy} = e^{x^4-3y}(-3)(4x^5 + 2x) = e^{x^4-3y}(-12x^5 - 6x)$$

$$f_{yx} = -3(2x)e^{x^4-3y} - 3x^2 e^{x^4-3y}(4x^3) = e^{x^4-3y}(-6x - 12x^5)$$

Der Satz von Schwarz

Auffällig an beiden Beispielen ist, daß jeweils $f_{xy} = f_{yx}$ gilt. Dies ist kein Zufall. Es gilt ganz allgemein der s.g. Satz von Schwarz (Clairaut's theorem)[2]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Eine wichtige Verallgemeinerung besagt, daß bei gemischten Ableitungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher die Reihenfolge der Differentiation egal ist. Sei $h = h(x, y, z, t)$. Dann gilt:

$$h_{xyyt} = h_{tyyx} = h_{xyty} = h_{yyxt} = h_{xtyy} \quad \text{usw.}$$

Dies führt manchmal zum Vereinfachen von Rechnungen: $f(x, y) = x^2 \sin y$ Wenn $f_{yyyyxxx}$ gesucht ist, darf ich genauso $f_{xxxyyyy}$ berechnen; f dreimal nach x differenziert ist aber 0, sodaß man $f_{yyyyxxx} = 0$ erhält, ohne ein einziges Mal nach y abgeleitet zu haben.

[2] Dieser Satz gilt für $f(x, y)$ an der Stelle (im Punkt) (x_0, y_0) wenn die Ableitungen f_{xy}, f_{yx} nicht nur im Punkt selbst (erinnern Sie sich: Stetigkeit muß im Prinzip für jeden Punkt geprüft werden!) stetig, sondern auch in einer kleinen Umgebung um den Punkt stetig sind!

Maxima, Minima, Sattelpunkte

Wir wollen im Folgenden Extremstellen von Funktionen mehrerer Veränderlicher bestimmen, d.h., Maxima und Minima. Weiters gibt es noch s.g. Sattelpunkte (die Verallgemeinerung von Wendepunkten).

Fangen wir mit zweidimensionalen Funktionen an. Nehmen wir an $f(x, y)$ hat an der Stelle (x_0, y_0) ein (lokales) Maximum (Minimum). Für diese Stelle muß gelten:

(1) Belasse ich $y = y_0$ konstant und variere ich x leicht um x_0, dann werde ich für ein genügend kleines ϵ keinen Punkt in $(x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon, y_0)$ finden, an dem $f(x, y_0) > f(x_0, y_0)$ ($f(x, y_0) < f(x_0, y_0)$ im Falle eines Minimums) ist. Das heißt aber doch, daß $f(x, y_0) = f(x)$ an der Stelle x_0 ein Maximum (Minimum) hat.

(2) Genauso kann ich $x = x_0$ konstant halten und y leicht um y_0 variieren. In diesem Fall werde ich für ein genügend kleines ϵ keinen Punkt in $(x_0, y_0 - \epsilon < y < y_0 + \epsilon)$ finden, an dem $f(x_0, y) > f(x_0, y_0)$ ($f(x_0, y) < f(x_0, y_0)$ im Falle eines Minimums) ist. Das heißt aber doch, daß $f(x_0, y) = f(y)$ an der Stelle y_0 ein Maximum (Minimum) hat.

Die Bedingungen (1) und (2) sind aber doch equivalent zu

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= 0 \\ f_y(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}$$

d.h., in unserer Extremstelle (x_0, y_0) müssen sowohl die partielle Ableitung nach x als auch nach y müssen verschwinden.

Maxima, Minima, Sattelpunkte

Wenn wir uns umgekehrt auf die Suche nach Extremstellen machen, so führen uns Überlegungen dieser Art sofort auf die *notwendige*[3] Bedingung, daß eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ an einer Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ eine Extremstelle besitzt:

$$\begin{aligned} f_{x_1} &= 0 \\ f_{x_2} &= 0 \\ &\cdots \\ f_{x_n} &= 0 \end{aligned}$$

Man muß obiges Gleichungssystem lösen und erhält (ggf.) Kanditenstellen(-punkte), bei denen es sich um Extremstellen handeln kann.

In einer Veränderlichen wissen wir, was wir tun müssen, um zwischen Minima, Maxima und Wendepunkten zu entscheiden, normalerweise reicht Betrachten der zweiten Ableitung an der/den fraglichen Stellen aus. Für Funktionen von drei und mehr Veränderlichen gibt es keine derartige einfache allgemeine Regel. Ein paar Konsistenzchecks kann man allerdings schon machen: Wenn z.B. die Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ein Minimm ist, dann müssen wohl alle reinen partiellen *zweiten* Ableitungen an dieser Stelle > 0 sein, d.h., $f_{x_i x_i}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. (Analog für ein Maximum $f_{x_i x_i}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) < 0$, $i = 1, \ldots, n$). Ist eine der 2. reinen partiellen Ableitungen an der Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ gleich Null, oder haben die 2. reinen partiellen Ableitungen unterschiedliches Vorzeichen, dann kann es sich *nicht* um ein Maximum / Minimum handeln. Leider sind diese Überlegungen nicht vollständig; wenn man sicher gehen will, muß man die Umgebung der fraglichen Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ systematisch untersuchen.

[3] Achtung: Dies ist keine *hinreichende* Bedingung!

Spezialfall: Funktion zweier Veränderlicher

In Hinblick auf die Bestimmung von Minima, Maxima und Sattelpunkten bilden zweidimensionale Funktionen insofern eine Ausnahme, weil es hier (ähnlich wie für Funktionen einer Veränderlichen) eine systematische Methode zur Bestimmung und Klassifizierung dieser Punkte gibt.[4]

Gesucht seien Minima, Maxima und Sattelpunkten von $f(x,y)$: Gemäß der allgemeinen Regel löst man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \end{aligned}$$

Punkte $(x_{0,i}, y_{0,i})$, die dieses erfüllen, werden nun wie folgt weiteruntersucht: Zunächst berechnet man die zweiten Ableitungen f_{xx}, f_{yy}, und f_{xy} ($= f_{yx}$). Danach berechnet man den Wert der zweiten Ableitungen an den Kandidatenstellen $(x_{0,i}, y_{0,i})$. Mit den Werten der 2. Ableitungen an den Kandidatenstellen berechnet man jetzt

$$\Delta = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 \qquad \text{für alle } (x_{0,i}, y_{0,i})$$

Es gilt jetzt:

$$\text{Maximum: } \Delta > 0, \;\; f_{xx} < 0 \text{ bzw. } f_{yy} < 0$$

$$\text{Minimum: } \Delta > 0, \;\; f_{xx} > 0 \text{ bzw. } f_{yy} > 0$$

$$\text{Sattelpunkt: } \Delta < 0$$

Für $\Delta = 0$ kann man nicht zwischen Min., Max. und Sattelpkt. entscheiden.

---

[4] Die folgende Regel finden Sie auch in Ihrer Formelsammlung. Auf die Ableitung wird verzichtet, da sie entweder weitergehende Vorkenntnisse verlangt, andernfalls sehr sehr mühsam (=lang!) ist.

Max./Min./Sattelpunkte – Beispiel

Gesucht sind die Maxima, Minima und Sattelpunkte der Funktion
$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

1. Man beginnt am besten mit der Berechnung aller benötigten Ableitungen:
$f_x = 4x^3 - 4y$, $f_y = 4y^3 - 4x$, $f_{xx} = 12x^2$, $f_{yy} = 12y^2$, $f_{xy} = f_{yx} = -4$.

2. Durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rclc} f_x = 4x^3 - 4y & = & 0 & \quad (I) \\ f_y = 4y^3 - 4x & = & 0 & \quad (II) \end{array}$$

sucht man Kandidatenstellen. In unserem Fall erhält man z.B. aus (I) $y = x^3$.
Einsetzen in (II) führt auf

$$x^9 - x = 0 = x(x^8 - 1) = 0$$

woraus man die drei Lösungen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = -1$ ablesen kann. Einsetzen dieser Lösungen in $y = x^3$ führt auf die 3 Kandidatenstellen $(0,0)$, $(1,1)$, und $(-1,-1)$.

3. Am besten erstellt man jetzt mit den Werten der 2. Ableitungen an den Kandidatenstellen ein kleine Tabelle ...

Max./Min./Sattelpunkte – Beispiel

	$(0,0)$	$(1,1)$	$(-1,-1)$
f_{xx}	0	12	12
f_{yy}	0	12	12
f_{xy}	-4	-4	-4
Δ	-16	128	128

Aus den Werten, die Δ und f_{xx} (bzw. f_{yy}) an den drei Kandidatenstellen annehmen, kann man zwischen Min., Max. und Sattelpunkten unterscheiden:

Max./Min./Sattelpunkte – Beispiel

	$(0,0)$	$(1,1)$	$(-1,-1)$
f_{xx}	0	12	12
f_{yy}	0	12	12
f_{xy}	-4	-4	-4
Δ	$-16 < 0$	128	128
	Spkt.		

Aus den Werten, die Δ und f_{xx} (bzw. f_{yy}) an den drei Kandidatenstellen annehmen, kann man zwischen Min., Max. und Sattelpunkten unterscheiden:

An der Stelle $(0,0)$ ist $\Delta < 0$, somit handelt es sich um einen Sattelpunkt.

Max./Min./Sattelpunkte – Beispiel

	$(0,0)$	$(1,1)$	$(-1,-1)$
f_{xx}	0	12	12
f_{yy}	0	12	12
f_{xy}	-4	-4	-4
Δ	$-16 < 0$	$128 > 0$	128
	Spkt.	Min.	

Aus den Werten, die Δ und f_{xx} (bzw. f_{yy}) an den drei Kandidatenstellen annehmen, kann man zwischen Min., Max. und Sattelpunkten unterscheiden:

An der Stelle $(0,0)$ ist $\Delta < 0$, somit handelt es sich um einen Sattelpunkt.

An der Stelle $(1,1)$ ist $\Delta > 0$, somit handelt es sich um ein Extremum. Da $f_{xx} > 0$, liegt ein Minimum vor.

Max./Min./Sattelpunkte – Beispiel

	$(0,0)$	$(1,1)$	$(-1,-1)$
f_{xx}	0	12	12
f_{yy}	0	12	12
f_{xy}	-4	-4	-4
Δ	$-16 < 0$	$128 > 0$	$128 > 0$
	Spkt.	Min.	Min.

Aus den Werten, die Δ und f_{xx} (bzw. f_{yy}) an den drei Kandidatenstellen annehmen, kann man zwischen Min., Max. und Sattelpunkten unterscheiden:

An der Stelle $(0,0)$ ist $\Delta < 0$, somit handelt es sich um einen Sattelpunkt.

An der Stelle $(1,1)$ ist $\Delta > 0$, somit handelt es sich um ein Extremum. Da $f_{xx} > 0$, liegt ein Minimum vor.

An der Stelle $(-1,-1)$ ist $\Delta > 0$, somit handelt es sich um ein Extremum. Da $f_{xx} > 0$, liegt ein Minimum vor.

Max./Min./Sattelpunkte – Beispiel

Zum Abschluß die graphische Darstellung der Funktion, die Position der beiden Minima und des Sattelpunkts ist durch kleine Punkte extra markiert:

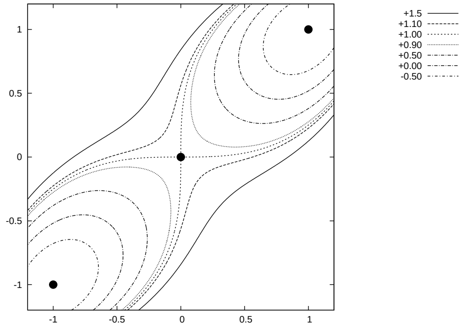
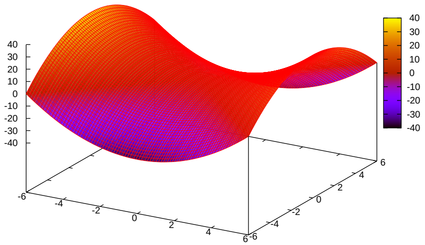


Illustration eines Sattelpunkts

Der Vollständigkeit halber eine graphische Darstellung eines Sattelpunkts mittels der vermutlich einfachsten Funktion, bei der ein solcher auftritt: $f(x, y) = x^2 - y^2$. Diese Funktion hat entlang der x-Achse bei $x = 0$ ein Minimum, entlang der y-Achse bei $y = 0$ ein Minimum. Daraus ergibt sich sofort die Form eines Sattels (Pferdesattel bzw. im geographischen Sinn)



Version 1.2, November 2002
Copyright © 2000,2001,2002 Free Software Foundation, Inc.

51 Franklin St, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301 USA

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "**Document**", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "**you**". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "**Modified Version**" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "**Secondary Section**" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "**Invariant Sections**" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "**Cover Texts**" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A “**Transparent**” copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not “Transparent” is called “**Opaque**”.
Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.
The “**Title Page**” means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, “Title Page” means the text near the most prominent appearance of the work’s title, preceding the beginning of the body of the text.
A section “**Entitled XYZ**” means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as “**Acknowledgements**”, “**Dedications**”, “**Endorsements**”, or “**History**”.) To “**Preserve the Title**” of such a section when you modify the Document means that it remains a section “Entitled XYZ” according to this definition.
The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.
You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document’s license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.
If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.
It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.

C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.

D. Preserve all the copyright notices of the Document.

E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.

F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.

G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

H. Include an unaltered copy of this License.

I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.

J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.

K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.

L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.

M. Delete any section Entitled “Endorsements”. Such a section may not be included in the Modified Version.

N. Do not retitle any existing section to be Entitled “Endorsements” or to conflict in title with any Invariant Section.

O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version’s license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled “Endorsements”, provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties–for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled “History” in the various original documents, forming one section Entitled “History”; likewise combine any sections Entitled “Acknowledgements”, and any sections Entitled “Dedications”. You must delete all sections Entitled “Endorsements”.

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4.

Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

> *Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".*

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with ... Texts." line with this:

> *with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.*

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.
If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.