Funktionen II: Integration

Stefan Boresch

Department of Computational Biological Chemistry
Faculty of Chemistry
University of Vienna

November 8, 2012

Vorbemerkung

Dies ist der erste, inhaltlich mehr oder weniger vollständige Entwurf — bitte daher mit der Möglichkeit von Fehlern rechnen!

Integration

Wir wissen, wie die Ableitung einer Funktion zu bilden ist:

$$f(x) \qquad \xrightarrow{\frac{d}{d\,x}} \qquad f'(x)$$

Jetzt interessieren wir uns für den Umkehrschritt, d.h., wir gehen davon aus, daß $f(x)$ die Ableitung einer Funktion $F(x)$ ist, und versuchen diese "Ausgangsfunktion" zu finden:

$$f(x) \qquad \xrightarrow{?} \qquad F(x)$$

Für $F(x)$ gilt, daß

$$\frac{dF(x)}{d\,x} = F'(x) = f(x).$$

Die gesuchte Funktion $F(x)$ wird Stammfunktion von $f(x)$ bezeichnet. Der englische Term "anti-derivative" trifft den Kern der Sache noch besser. Mit Hilfe der Stammfunktion können wir nun den Begriff des unbestimmten Integrals einführen:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Die Funktion $f(x)$ unter dem Integralsymbol $\int$ wird als *Integrand* bezeichnet. Differentiation der rechten Seite führt zum Integranden zurück. Daran ändert die Anwesenheit der sogenannten Integrationskonstanten C nichts, denn die Ableitung einer Konstanten ist null. Die Integrationskonstante ist vorläufig für uns ein Kuriosum. Sie ist allerdings Bestandteil des unbestimmten Integrals, und sobald wir uns mit Differentialgleichungen beschäftigen, beginnt diese eine wichtige Rolle zu spielen.

Ermittlung der Stammfunktion — 1. Beispiel

Gesucht sei z.B.

$$\int x^2 \, dx = ?$$

Wir überlegen uns, welche Funktion bei Differentiation zu x^2 wird. Die Stammfunktion wir also wohl oder übel etwas mit x^3 zu tun haben. Es gilt

$$(x^3)' = 3x^2$$

und daher

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

Somit ist $x^3/3$ die gesuchte Stammfunktion zu x^2. Wir können jede beliebige Konstante zu $x^3/3$ hinzuaddieren; diese verschwindet beim Differenzieren. Wir haben also

$$\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Finden von Stammfunktionen durch Umkehr der Ableitungsregeln

Wie aus dem Beispiel klar geworden sein sollte, lassen sich viele Stammfunktionen einfach dadurch finden, daß man die Ableitungsregeln elementarer Funktionen von rechts nach links liest, d.h., wenn ich weiß, daß die Ableitung von $\sin x$ der $\cos x$ ist, so ist klar, daß die Stammfunktion zu $\cos x$ gleich $\sin x$ sein muß. Man kann sich also leicht folgende Tabelle zusammenbasteln:

Funktion f(x)	Stammfunktion F(x)
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$x^a \quad a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$

Verwendet man eine vollständige Tabelle (z.B. Bartsch S.135), so läßt sich auch manches scheinbar kompliziertes (unbestimmtes) Integral sofort hinschreiben, z.B.,

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

Eine vollständige Liste derartiger Grundintegrale finden Sie z.B. im Bartsch auf Seite 150 — im wesentlichen ist es die Umkehrung der Tabelle von S.135.

Integrationsregeln

Zur Tabelle der Grundintegrale gehören Integrationsregeln: Die zwei trivialen sind

$$\int (f(x) \pm g(x))\ dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

$$\int \alpha\, f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Wir haben also z.B.

$$\int \left(x^2 - \cos x\right)\ dx = \int x^2\, dx - \int \cos x\, dx = \frac{x^3}{3} - \sin x + C$$

oder

$$\int 5 \sin x\, dx = 5 \int \sin x\, dx = -5 \cos x + C$$

Darüberhinaus wird es recht rasch kompliziert. Das Finden von Stammfunktionen ist bedeutend schwieriger als Differenzieren, bedient sich einer Vielzahl von Tricks und bedingt viel Übung. Darüberhinaus gibt es Funktionen, zu denen mit den uns bekannten Funktionen keine Stammfunktion angebbar ist, obwohl die Stammfunktion existiert (mehr dazu später). Daher gibt es seit jeher dicke Bücher, sogenannte Integraltafeln. Heute ist dies ein Bereich, wo Computeralgebrasysteme ihre Stärke und Nützlichkeit zeigen können. Wir beschränken uns daher im Rahmen dieser VO auf die Demonstration zweier Grundtechniken, der s.g. *partiellen Integration* und der *Substitutionsmethode* (in ihrer einfachsten Form).

Partielle Integration

Partielle Integration ist die Umkehrung der Produktregel. Um dies abzuleiten, nehmen wir an, daß eine Stammfunktion $H(x)$ das Produkt zweier Funktionen ist, $H(x) = F(x)G(x)$, wobei $F(x)$ und $G(x)$ selbst wieder die Stammfunktionen von $f(x)$ und $g(x)$ sind. Wir differenzieren jetzt $H(x)$:

$$(H(x))' = (F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x)$$

Wir greifen die roten Teile heraus und stellen sie um:

$$f(x)G(x) = (F(x)G(x))' - F(x)g(x)$$

Jetzt integrieren wir rechte und linke Seite, d.h.

$$\int f(x)G(x)\,dx = \int (F(x)G(x))'\,dx - \int F(x)g(x)\,dx$$

und erhalten die Rechenregel für partielle Integration,

$$\int f(x)G(x)\,dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\,dx$$

Der letzte Schritt folgt wegen $\int (F(x)G(x))'\,dx = F(x)G(x)$ (Integral hebt Differentiation auf!). In der obigen Gleichung steht rechts und links ein Integral. Helfen tut das genau dann, wenn das rechte Integral leichter zu berechnen ist, als das linke. Ein erstes Beispiel verdeutlicht dies hoffentlich:

Partielle Integration — ein erstes Beispiel

Gesucht ist

$$\int x \sin x \, dx = ?$$

Das Integral hat genau die Form

$$\int f(x) G(x) \, dx = ?$$

allerdings ist nicht klar ist, ob z.B. x $f(x)$ oder $G(x)$ entspricht.
Versuch I: $x = f(x)$, $\sin x = G(x)$

$$\int x \sin x dx = \int f(x) G(x) dx = F(x) G(x) - \int F(x) g(x) dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cos x dx = ?$$

Sie erkennen hoffentlich, was geschieht: x $(= f(x))$ wird integriert; hingegen wird $\sin x$ $(= G(x))$ im zweiten Term auf der rechten Seite differenziert. Soweit, so gut, nur ist das neue Integral rechts komplizierter als das linke (aus x wurde x^2). Daher ...

Versuch II: $x = G(x)$, $\sin x = f(x)$

$$\int x \sin x dx = \int f(x) G(x) dx = F(x) G(x) - \int F(x) g(x) dx = x(-\cos x) - \int 1\,(-\cos x) dx$$

Da x differenziert 1 ergibt, ist das neue Integral auf der rechten Seite ($\int(-\cos x) dx$) ein Grundintegral und daher sofort berechenbar, und somit finden wir

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Substitution

Ähnlich wie die Methode der partiellen Integration aus der Produktregel folgt, kann man die Substitionsmethode als Umkehrung der Kettenregel betrachten.Nehmen Sie an, Sie hätten eine verkettete Funktion der Form $F(g(x))$. Diese Funktion abgeleitet ergibt wegen der Kettenregel

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x)$$

Indem wir linke und rechte Seite integrieren, finden wir (wenn wir die Seiten vertauschen):

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int (F(g(x)))'\; dx = F(g(x)) + C$$

Wir finden somit z.B.

$$\int \sqrt{2+x^2}\, 2x\, dx = \int (2+x^2)^{1/2}\, 2x\, dx = \int f(g(x)) g'(x)\, dx = \frac{2}{3}(2+x^2)^{3/2} + C$$

(NB: $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2}\, dx = \frac{2}{3} x^{3/2}$).

Substitution — ein erstes Beispiel

Es ist selten der Fall, daß ein Integrand so wie im letzten Beispiel “perfekt” mit der allgemeinen Formel übereinstimmt. Nehmen wir z.B. folgende Variante der letzten Aufgabe:

$$\int x\sqrt{2-x^2}\,dx = ?$$

Wenn wir wieder $2-x^2$ als “innere” Funktion $g(x)$ nehmen, so ist deren innere Ableitung $g'(x) = -2x$ nicht gleich dem multiplikativem Faktor x im Integrand. Wie wir gleich sehen werden reicht es jedoch, daß — wie hier der Fall — der multiplikative Faktor *proportional* der inneren Ableitung von $g(x)$ ist. Wir zeigen jetzt wie man die Substitutionsmethode (in dieser einfachsten Form) allgemein anwendet (dabei wird auch die Bedeutung des Namens klar werden). Als erstes führen wir eine neue Variable für die “innere” Funktion ein:

$$\int (\underbrace{2-x^2}_{t=t(x)})^{1/2}\,x\,dx = \int (t)^{1/2}\,x\,dx = \ldots ?$$

Als nächstes müssen wir jetzt die verbleibenden x durch t ersetzen. Wir haben

$$t = t(x) = 2-x^2 \quad \text{und somit} \quad \frac{dt}{dx} = -2x$$

Den Differentialquotienten $\dfrac{dt}{dx}$ darf man wie einen Bruch manipulieren, daher kann man leicht dx durch dt ausdrücken

$$dx = \frac{dt}{-2x}$$

Substitution — ein erstes Beispiel, Fortsetzung

und erhält

$$\ldots = \int (t)^{1/2}\, x\, \frac{dt}{-2x} = -\frac{1}{2} \int t^{1/2}\, dt = -\frac{1}{2}\frac{2}{3} t^{3/2} + C = -\frac{1}{3} t^{3/2} + C$$

womit das Integral in der neuen Variable t gelöst ist. Es bleibt t durch $t = 2 - x^2$ zu ersetzen

$$-\frac{1}{3} t^{3/2} + C = -\frac{1}{3}(2 - x^2)^{3/2} + C$$

und das Integral ist auch in der ursprünglichen Variable gelöst.

Die gleiche Technik hätte auch beim ersten Beispiel funktioniert, und ist immer dann erfolgreich, wenn ein Integrand die Form

$$f(g(x))\, \tilde{g}'(x) \quad \text{mit} \quad \tilde{g}'(x) = \alpha\, g'(x)$$

hat (α ist ein reelle Zahl, d.h., $\tilde{g}'(x)$ unterscheidet sich von der echten Ableitung $g'(x)$ der inneren Funktion $g(x)$ nur durch eine multiplikative Konstante).

Einige Kommentare und weitere Beispiele

Wir haben jetzt jeweils ein erstes einfaches Beispiel für Substitution und partielle Integration gesehen. An dieser Stelle sind ein paar Kommentare fällig:

- Beim Differenzieren sind Produkt- und Kettenregel gleich wichtig, und es ist immer klar, wann welche Regel oder eine Kombination von beiden einzusetzen ist.
- Beim Integrieren fällt dem Anfänger die Wahl zwischen partieller Integration und Substitution nicht so leicht. In beiden Fällen (s. Beispiele) ist der Integrand ein Produkt.
- Es hilft in diesem Zusammenhang zu wissen, daß beim Integrieren Substitution *viel* viel wichtiger als partielle Integration ist. Ist also der Integrand ein Produkt, so sollte man immer prüfen, ob nicht der Integrand (versteckt aber doch) die Form

  $$f(g(x))\,\tilde{g}'(x)$$

  hat, und somit durch Substitution zu lösen ist. Erst wenn dies tatsächlich nicht der Fall ist, sollte man an partielle Integration denken.

Um dies zu verdeutlichen, beginnen wir jetzt mit dem Vergleich von drei Integralen, von denen eines ein Grundintegral, eines durch Substitution und eines durch partielle Integration zu lösen ist. Danach gehen wir die wichtigsten Fälle durch, in denen tatsächlich partielle Integration zu verwenden ist. Zum Schluß betrachten wir einfache und weniger einfache Beispiele für Substitution.

Drei (vier) Integrale mit "ähnlichen" Integranden

Fall 1: $\int e^x \, dx$
Hier handelt es sich um ein Grundintegral. Da e^x abgeleitet sich selbst ergibt, können wir ohne weitere Rechnung schreiben

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

Fall 2: $\int x \, e^x \, dx$
Hier haben wir als Integrand ein Produkt, jedoch keine der Einzelfunktionen ist verschachtelt. Der Integrand paßt nicht ins Schema für Substitution, daher probieren wir partielle Integration mit $f(x) = e^x$ und $G(x) = x$:

$$\int xe^x dx = \int G(x) f(x) dx = G(X)F(x) - \int g(x)F(x)dx = xe^x - \int 1 \, e^x dx = x \, e^x - e^x + C$$

Fall 3: $\int x \, e^{x^2} \, dx$
Im Gegensatz zu 2) haben wir eine verschachtelte Funktion (e^{x^2}), und der multiplikative Faktor x ist proportional der Ableitung von x^2 ($\Rightarrow 2x$). Daher Substitution $t = x^2$. Mit

$$\frac{dt}{dx} = 2x \text{ ergibt sich } dx = \frac{dt}{2x}, \text{ somit } \int x e^t \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

Drei (vier) Integrale mit "ähnlichen" Integranden

Fall 1: $\int e^x \, dx$
Hier handelt es sich um ein Grundintegral. Da e^x abgeleitet sich selbst ergibt, können wir ohne weitere Rechnung schreiben

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

Fall 2: $\int x \, e^x \, dx$
Hier haben wir als Integrand ein Produkt, jedoch keine der Einzelfunktionen ist verschachtelt. Der Integrand paßt nicht ins Schema für Substitution, daher probieren wir partielle Integration mit $f(x) = e^x$ und $G(x) = x$:

$$\int xe^x dx = \int G(x) f(x) dx = G(X)F(x) - \int g(x)F(x)dx = xe^x - \int 1 \, e^x dx = x \, e^x - e^x + C$$

Fall 3: $\int x \, e^{x^2} \, dx$
Im Gegensatz zu 2) haben wir eine verschachtelte Funktion (e^{x^2}), und der multiplikative Faktor x ist proportional der Ableitung von x^2 ($\Rightarrow 2x$). Daher Substitution $t = x^2$. Mit

$$\frac{dt}{dx} = 2x \text{ ergibt sich } dx = \frac{dt}{2x}, \text{ somit } \int xe^t \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

Fall 4: $\int e^{x^2} \, dx$ Dies ist der Fall eines Integrals für das wir keine Funktion kennen, die abgeleitet den Integranden ergibt. NB: Die Stammfunktion existiert und ist durch das Integral definiert!

Anwendung partieller Integration

1) Wie Sie aus den bisherigen Beispielen sehen, ist partielle Integration für Integrale des Typs $\int x\, f(x)\, dx$ interessant, wobei $f(x) = e^x, \sin x, \cos x, \ldots$. Partielle Integration kann mehrfach hintereinander ausgeführt werden, z.B.

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x\, dx$$

wobei $x^2 = G(x)$ und $\cos x = f(x)$ gesetzt wurde. Das Integral auf der rechten Seite wird jetzt nochmals mit partieller Integration "bearbeitet", d.h.,

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x\, dx = x^2 \sin x - 2 \left(-x \cos x - \int 1\, (-\cos x)\, dx \right)$$

Nach diesem 2. Schritt haben wir rechts ein Grundintegral und finden

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

2) Partielle Integration kann auch auf Integrale des Typs

$$\int e^x \sin x\, dx \text{ oder } \int e^x \cos x\, dx$$

angewandt werden. NB: Es gibt elegantere Methoden die derartige Integrale mit weniger Aufwand lösen, aber Übung schadet nicht ...

Anwendung partieller Integration — Fortsetzung

Bei derartigen Beispielen ist es egal, welche der Funktionen integriert, welche differenziert wird, nur (da wir zweimal partiell integrieren werden müessen) muß man "konsequent" sein. Im Folgenden wird $e^x = f(x)$ integriert und die Winkelfunktion $= G(x)$ differenziert:

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx \right)$$

Nach dem Zusammenfassen findet man

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

oder

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

womit man schließlich

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C$$

findet.

Anwendung partieller Integration — Umkehrfunktionen

Die letzte Nischenanwendung partieller Integration besteht im Finden von Stammfunktionen von Umkehrfunktionen wir $\ln x$, $\arcsin x$ etc. Wir zeigen das Prinzip für $\int \ln x \, dx$; Abenteuerlustige mögen sich an $\int \arcsin x \, dx$ oder gar $\int \arctan x \, dx$ versuchen. Der Trick besteht darin, den Integranden mit 1 zu multiplizieren, d.h.

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \, \ln x \, dx$$

Jetzt wenden wir partielle Integration an, wobei wir $f(x) = 1$ und $G(x) = \ln x$ setzen. Partielle Integration ergibt

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \, \ln x \, dx = x \, \ln x - \int x \, \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Für die Ableitung ungewöhnlichere Umkehrfunktionen ($\arcsin x$ etc.) dürfen Sie gerne die Formelsammlung verwenden.

PS: $\int x^n \ln x \, dx$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) läßt sich übrigens auch (in einem Schritt) durch part. Integration lösen, indem Sie $f(x) = x^n$, $G(x) = \ln x$ setzen — probieren Sie es doch aus!

Jetzt aber endgültig genug von partieller Integration und einige Beispiele zur Substitionsmethode!

Anwendung der Substitutionsmethode

1) Beginnen wir mit einem Standardbeispiel um die Methode zu rekapitulieren:

$$\int x \sin(x^2)\, dx$$

Beachten Sie, daß x bis auf einen Faktor 2 die innere Ableitung von $\sin(x^2)$ ist. Daher

$$t = x^2 \qquad \frac{dt}{dx} = 2x \qquad dx = \frac{dt}{2x} \text{ und somit}$$

$$\int x \sin(x^2)\, dx = \int x \sin t \, \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int \sin t \, dt = -\frac{1}{2} \cos t = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + C$$

Der Selbstcheck ist, ob die alte Variable komplett durch die neue Variable ersetzt werden kann — wenn nein liegt entweder ein Rechenfehler vor, oder das Integral kann mit Substitution nicht gelöst werden.

Z.B. führt der Versuch der Substitution $t = x^3$ im Integral $\int x \sin(x^3)\, dx$ zu keinem Ergebnis,[1] da Ihnen ein x "überbleibt" — bitte ausprobieren. Das Integral $\int x^2 \sin(x^3)\, dx$ läßt sich hingegen damit lösen.

---

[1] was natürlich von vornherein klar sein sollte da $(x^3)' = 3x^2 \neq \alpha x$!

Anwendung der Substitutionsmethode II

2) Bevor wir zu komplizierteren Beispielen übergehen, eine ganz wichtige Anwendung von Substitution: Was macht man mit "Beinahegrundintegralen", d.h., Integralen wie $\int e^{-5x}\,dx$, $\int \cos(2x)\,dx$ usw.?

Man kann durch Überlegen draufkommen, daß die entsprechenden Stammfunktionen $-\frac{1}{5}e^{-5x}$ bzw. $\frac{1}{2}\sin(2x)$ sein müssen — überzeugen Sie sich selbst indem Sie zur Probe differenzieren! Sie dürfen aber genauso substituieren:

$$\int e^{-5x}\,dx = (\text{mit } t = -5x,\ \frac{dt}{dx} = -5,\ dx = -\frac{dt}{5}) = \int e^t \frac{dt}{-5} = -\frac{1}{5}e^t = -\frac{1}{5}e^{-5x} + C$$

$\int \cos(2x)\,dx$ bleibt Ihnen als Übungsaufgabe!

Anwendung der Substitutionsmethode III

Jetzt ein paar durchgerechnete Beispiele ohne weiteren Kommentar. Überlegen Sie selbst, was die "äußere", was die "innere Funktion" ist, bzw. wo sich die innere Ableitung versteckt. Als 1. Schritt schreibe ich das Integral jeweils so um, daß dies besser ersichtlich sein sollte!

$$\int \sin^6 x \cos x \, dx = \int (\sin x)^6 \cos x \, dx = \ldots$$

$$t = \sin x \;\Rightarrow\; \frac{dt}{dx} = \cos x \;\Rightarrow\; dx = \frac{dt}{\cos x}$$

$$\ldots = \int t^6 \cos x \frac{dt}{\cos x} = \frac{t^7}{7} = \frac{\sin^7 x}{7} + C$$

$$\int \frac{2x}{x^2 - 2} \, dx = \int (x^2 - 2)^{-1} 2x \, dx = \ldots$$

$$t = x^2 - 2 \;\Rightarrow\; \frac{dt}{dx} = 2x \;\Rightarrow\; dx = \frac{dt}{2x}$$

$$\ldots = \int t^{-1} 2x \frac{dt}{2x} = \ln |t| = \ln \left| x^2 - 2 \right| + C$$

Anwendung der Substitutionsmethode III

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{1}{x} (\ln x)^{-1} \, dx = \dots$$

$$t = \ln x \;\Rightarrow\; \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; dx = x \, dt$$

$$\dots = \int \frac{1}{x} t^{-1} \, x \, dt = \ln |t| = \ln |\ln x| + C$$

Anwendung der Substitutionsmethode IV

Zum Schluß zwei weitere Beispiele, die nicht ins Schema passen, aber sich doch durch Substitution lösen lassen ...

1. Manchmal kann man die Situation retten, obwohl nach der Substitution zunächst "Reste" der alten Variablen übrigbleiben. Im folgenden Integral

$$\int x^8 \sqrt{x^3 - 5}\, dx = \dots$$

ist x^8 zwar nicht die innere Ableitung von $\sqrt{x^3-5}$, aber wir versuchen trotzdem die Substitution

$$t = x^3 - 5 \;\Rightarrow\; \frac{dt}{dx} = 3x^2 \;\Rightarrow\; dx = \frac{dt}{3x^2}$$

$$\dots = \int x^8 \sqrt{t}\, \frac{dt}{3x^2} = \frac{1}{3} \int x^6 \sqrt{t}\, dt = \dots$$

Es bleibt uns also ein Faktor $x^6 = (x^3)^2$ übrig. Bevor man in so einer Situation aufgibt, sollte man noch schauen, ob man die Substitution nicht nochmals verwerten kann. Aus $t = x^3 - 5$ folgt doch auch $x^3 = t + 5$, und somit

$$x^6 = (x^3)^2 = (t+5)^2 = t^2 + 10t + 25$$

womit wir das Integral lösen können:

$$= \frac{1}{3} \int (t^2 + 10t + 25) t^{1/2}\, dt = \frac{1}{3} \int t^{5/2} + 10t^{3/2} + 25t^{1/2}\, dt = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{7} t^{7/2} + 10 \frac{2}{5} t^{5/2} + 25 \frac{2}{3} t^{3/2} \right) =$$

$$= \sqrt{t} \left(\frac{2}{21} t^3 + \frac{4}{3} t^2 + \frac{50}{9} t \right) = \sqrt{x^3 - 5} \left(\frac{2}{21} (x^3-5)^3 + \frac{4}{3} (x^3-5)^2 + \frac{50}{9} (x^3-5) \right) + C$$

Dies könnte/sollte noch weiter vereinfacht werden, in dem man die Potenzen von $x^3 - 5$ ausrechnet und die Terme in der großen Klammer zusammenfasst ...

Anwendung der Substitutionsmethode IV

Das folgende Beispiel zeigt, daß in Ermangelung anderer Ideen Substitution auch verwendet werden kann, um ein Integral auf eine andere Form zu bringen, in der Hoffnung, daß diese andere Form leichter lösbar ist.

$$\int \sin(\sqrt{x})\, dx = \ldots$$

Wir probieren auf Verdacht:

$$t = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} x^{-1/2} \;\Rightarrow\; dx = 2\, dt\, x^{1/2}$$

$$\ldots = 2 \int \sin t\, dt\, \sqrt{x} = 2 \int t \sin t\, dt$$

wo wir im letzten Schritt wie im vorigen Beispiel die ursprüngliche Substitution nochmals verwendet haben. Das neue Integral in t kann jetzt leicht mit partieller Integration gelöst werden (dieser Schritt ist übersprungen), und wir erhalten

$$\ldots = 2\,(-t \cos t + \sin t) = 2\left(\sin \sqrt{x} - \sqrt{x} \cos \sqrt{x}\right) + C$$

Anwendung der Substitutionsmethode IV

Das folgende Beispiel zeigt, daß in Ermangelung anderer Ideen Substitution auch verwendet werden kann, um ein Integral auf eine andere Form zu bringen, in der Hoffnung, daß diese andere Form leichter lösbar ist.

$$\int \sin(\sqrt{x})\, dx = \ldots$$

Wir probieren auf Verdacht:

$$t = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} x^{-1/2} \;\Rightarrow\; dx = 2\, dt\, x^{1/2}$$

$$\ldots = 2 \int \sin t\; dt\, \sqrt{x} = 2 \int t \sin t\; dt$$

wo wir im letzten Schritt wie im vorigen Beispiel die ursprüngliche Substitution nochmals verwendet haben. Das neue Integral in t kann jetzt leicht mit partieller Integration gelöst werden (dieser Schritt ist übersprungen), und wir erhalten

$$\ldots = 2\,(-t \cos t + \sin t) = 2\left(\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right) + C$$

Falls es Sie beruhigt: Ich plane nicht, derartige Integrale zur Prüfung zu geben ...

Das bestimmte Integral — Vorbemerkung

Wir können jetzt (einfache) unbestimmte Integrale lösen (entsprechende Stammfunktionen finden). Als nächstes führen wir den Begriff des *bestimmten Integrals* ein und zeigen die Verbindung zwischem dem bestimmten Integral und der Stammfunktion.

Die folgenden Folien schaffen via dem Mittelwertsatz (MWS) einen Konnex zwischen der Stammfunktion und dem sogenannten *bestimmten Integral* und geben eine geometrische Interpretation des letzteren (gilt nur für Funktionen, die im betrachteten Intervall $a \leq x \leq b$ größer gleich 0 sind). Sie erheben keinerlei Anspruch auf Exaktheit im Sinne eines mathematischen Beweises!

Das bestimmte Integral — Vorbemerkung

Wir können jetzt (einfache) unbestimmte Integrale lösen (entsprechende Stammfunktionen finden). Als nächstes führen wir den Begriff des *bestimmten Integrals* ein und zeigen die Verbindung zwischem dem bestimmten Integral und der Stammfunktion.

Die folgenden Folien schaffen via dem Mittelwertsatz (MWS) einen Konnex zwischen der Stammfunktion und dem sogenannten *bestimmten Integral* und geben eine geometrische Interpretation des letzteren (gilt nur für Funktionen, die im betrachteten Intervall $a \leq x \leq b$ größer gleich 0 sind). Sie erheben keinerlei Anspruch auf Exaktheit im Sinne eines mathematischen Beweises!

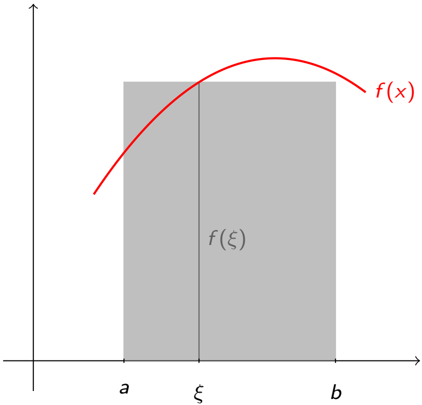
Zur Erinnerung: Der Mittelwertsatz (MWS) der Differentialrechnung lautet:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

wobei $f(x)$ auf dem Intervall $a \leq x \leq b$ stetig und auf $a < x < b$ differenzierbar ist, und $a < \xi < b$ gilt. Der MWS besagt, daß es unter diesen Voraussetzungen *mindestens* ein solches ξ gibt.

Für das Folgende nehmen wir zusätzlich zu den Voraussetzungen des MWS an, daß $f(x)$ auf dem betrachteten Intervall $[a, b] \geq 0$ sei. (Diese Zusatzbedingung dient nur der ersten geometrischen Interpretation und wird später fallen gelassen.)

Das bestimmte Integral



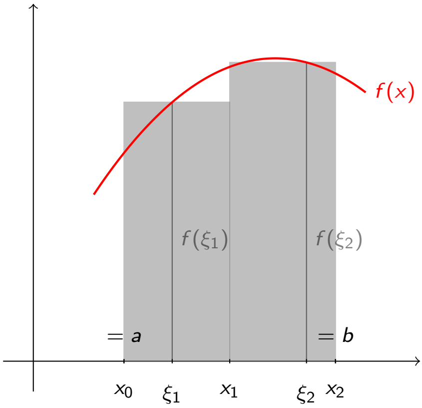
$$F(b) - F(a) = f(\xi)(b - a)$$

Durch Integration des MWS erhält man

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = f(\xi);$$

die geometrische Interpretation ist oben gezeigt. $F(b) - F(a)$ entspricht der Fläche des gezeigten Rechtecks.

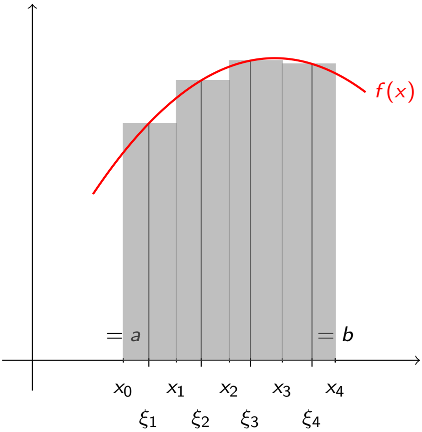
Das bestimmte Integral



$$F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) =$$
$$= F(b) - F(a) =$$
$$= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1)$$

Teilt man das Intervall $[a, b]$ in zwei gleich große Teilstücke, $a \leq x \leq x_1$ und $x_1 \leq x \leq b$, und wendet auf beide Teile den MWS an, erhält man obiges Bild ($a = x_0$, $b = x_2$). $F(b) - F(a)$ ist die Summe der beiden Rechtecksflächen.

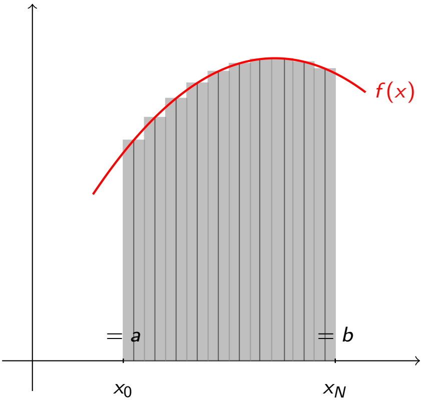
Das bestimmte Integral



$$F(x_4) - F(x_3) + F(x_3) - \dots$$
$$\dots + F(x_1) - F(x_0) =$$
$$= F(b) - F(a) =$$
$$= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \dots + f(\xi_4)(x_4 - x_3)$$

Wir wiederholen die Prozedur, und enden mit 4 Rechtecksflächen. Beachten Sie, wie sich die Werte der Stammfunktion an den Zwischenstellen x_1, x_2 und x_3 herauskürzen, sodaß als linke Seite wieder $F(b) - F(a)$ übrigbleibt.

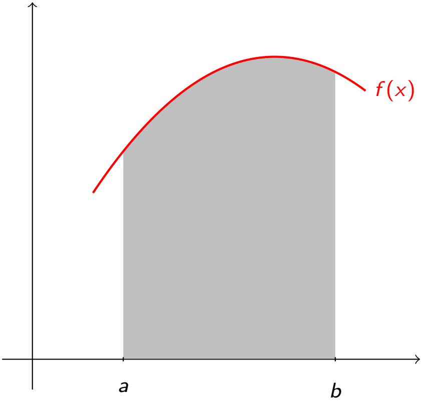
Das bestimmte Integral



$$F(x_N) - F(x_{N-1}) + F(x_{N-1}) - \ldots$$
$$\ldots + F(x_1) - F(x_0) =$$
$$= F(b) - F(a) =$$
$$= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \ldots + f(\xi_N)(x_4 - x_{N-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x$$

Wir dehnen die Prozedur auf N Subintervalle aus und führen Summationsnotation ein. Die Summe aller Rechtecksflächen ist nach wie vor $F(b) - F(a)$. Im letzten Schritt kürzen wir $x_i - x_{i-1}$ durch Δx ab, und nehmen (ohne wirkliche Beschränkung der Allgemeinheit) an, daß alle Δx gleich groß (klein) sind.

Das bestimmte Integral



$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x \Rightarrow$$

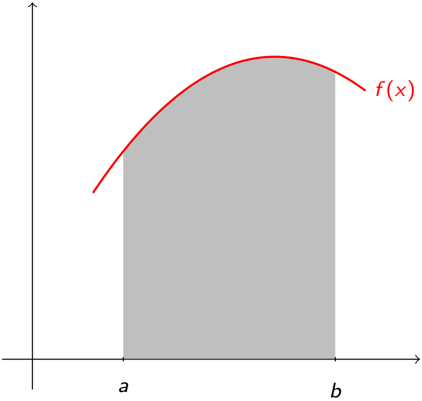
... wenn Grenzwert existiert ...

$$= \int_a^b f(x)dx =$$

$$= F(b) - F(a)$$

Als logischen, letzten Schritt machen wir Δx unendlich klein, suchen also den Grenzwert $\Delta x \to 0$. Wenn dieser Grenzwert existiert, so bezeichnet man ihn als das *bestimmte Integral* $\int_a^b f(x)dx$. Solange (wie vorausgesetzt) $f(x)$ überall positiv ist, ist der Wert des bestimmten Integrals gleich der Fläche, die von $f(x)$ und der x-Achse auf dem Intervall $a \leq x \leq b$ eingeschlossen wird.

Das bestimmte Integral



$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x \Rightarrow$$

... wenn Grenzwert existiert ...

$$= \int_a^b f(x)dx =$$

$$= F(b) - F(a)$$

Unser Zugang über den MWS bietet darübehinaus eine bequeme Rechenvorschrift für das bestimmte Integral: die Differenz der Stammfunktion an den Stellen $x = b$ und $x = a$. Dieses in Wirklichkeit nichttriviale Ergebnis wird auch als *Hauptsatz der Integralrechnung* bezeichnet!

Das bestimmte Integral — Zusammenfassung

Unsere Entwicklung des Integralbegriffs (unbestimmtes Integral, dann bestimmtes Integral) folgt nicht der historischen Entwicklung, die mit dem bestimmten Integral begann. Startpunkt war das Bemühen Summen der Form

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \qquad x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k \qquad x_0 = a,\ x_k = b \qquad (*)$$

zu berechnen. Die klassische (Riemann'sche) Definition lautet in etwa wie folgt:Hat die Summe (*) einen Grenzwert, wenn die Teilintervalle $x_k - x_{k-1}$ kleiner und kleiner gemacht werden ($x_k - x_{k-1} \to 0$) und hängt dieser Grenzwert *nicht* von der Wahl von ξ_k ab, so schreibt man

$$\lim_{(x_k - x_{k-1}) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x)dx$$

Dieser derartig definierte Grenzwert wird als bestimmtes Integral bezeichnet.

Das bestimmte Integral — Zusammenfassung

Unsere Entwicklung des Integralbegriffs (unbestimmtes Integral, dann bestimmtes Integral) folgt nicht der historischen Entwicklung, die mit dem bestimmten Integral begann. Startpunkt war das Bemühen Summen der Form

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \qquad x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k \qquad x_0 = a,\ x_k = b \qquad (*)$$

zu berechnen. Die klassische (Riemann'sche) Definition lautet in etwa wie folgt:Hat die Summe (*) einen Grenzwert, wenn die Teilintervalle $x_k - x_{k-1}$ kleiner und kleiner gemacht werden ($x_k - x_{k-1} \to 0$) und hängt dieser Grenzwert *nicht* von der Wahl von ξ_k ab, so schreibt man

$$\lim_{(x_k - x_{k-1}) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x)dx$$

Dieser derartig definierte Grenzwert wird als bestimmtes Integral bezeichnet.

Per se ist/war das bestimmte Integral durch Summation und Grenzwertbildung zu berechnen. Erst der Hauptsatz der Integralrechnung (hier durch unsere Betrachtungen über den MWS motiviert) erlaubt die bequeme Berechnung über die Stammfunktion an den Endpunkten, d.h.

$$\lim_{(x_k - x_{k-1}) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Berechnung und Eigenschaften des bestimmten Integral

Beispiel eines bestimmten Integrals:

$$\int_1^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64-1}{3} = 21$$

Eigenschaften: Aus $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ folgt

- Das bestimmte Integral ist eine Zahl!

Berechnung und Eigenschaften des bestimmten Integral

Beispiel eines bestimmten Integrals:

$$\int_1^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64-1}{3} = 21$$

Eigenschaften: Aus $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ folgt

- Das bestimmte Integral ist eine Zahl!
- Die Variable kann beliebig getauscht werden,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\text{hansi})\,d(\text{hansi}) = \dots$$

Berechnung und Eigenschaften des bestimmten Integral

Beispiel eines bestimmten Integrals:

$$\int_1^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64-1}{3} = 21$$

Eigenschaften: Aus $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ folgt

- Das bestimmte Integral ist eine Zahl!
- Die Variable kann beliebig getauscht werden,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\text{hansi})\,d(\text{hansi}) = \dots$$

- $\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\,dx$

Berechnung und Eigenschaften des bestimmten Integral

Beispiel eines bestimmten Integrals:

$$\int_1^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64-1}{3} = 21$$

Eigenschaften: Aus $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ folgt

- Das bestimmte Integral ist eine Zahl!
- Die Variable kann beliebig getauscht werden,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\text{hansi})\,d(\text{hansi}) = \dots$$

- $\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$

Berechnung und Eigenschaften des bestimmten Integral

Beispiel eines bestimmten Integrals:

$$\int_1^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64-1}{3} = 21$$

Eigenschaften: Aus $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ folgt

- Das bestimmte Integral ist eine Zahl!
- Die Variable kann beliebig getauscht werden,

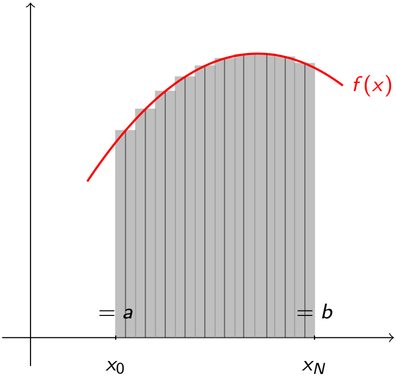
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\text{hansi})\,d(\text{hansi}) = \dots$$

- $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$
- Sei c eine reelle Zahl zwischen a und b, d.h., $a < c < b$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a)$$

Hinweis: Dies ist nicht nur eine "nette" Eigenschaft, sondern muß gelten. Wenn Sie für eine bestimmte Funktion $f(x)$ und ein Intervall $[a, b]$ eine Zahl c finden, sodaß obige Beziehung *nicht* gilt, dann ist in diesem Fall der Hauptsatz nicht anwendbar und das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ existiert nicht! Wir werden solche Fälle in Kürze im Kapitel *uneigentliche Integrale* kennenlernen.

Flächenberechnung



$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x = \quad (*)$$

$$= \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Die obige Skizze zeigt eine anschauliche Interpretation des bestimmten Integrals: Durch die immer feiner werdenden Zerlegung in dünnere und dünnere Rechtecke wird letztlich durch das bestimmte Integral der Flächeninhalt beschrieben, der von der x-Achse und der Funktion auf dem Intervall $a \leq x \leq b$ eingeschlossen wird. Aber Achtung: *Das gilt in dieser Form nur, wenn die Funktionswerte überall positiv sind!* Wie man aus der Summe (*) sieht, so tragen die Produkte $f(\xi_i)\Delta x$ überall dort negativ bei, wo $f(x) < 0$. D.h., im allgemeinen

$$\int_a^b f(x)\, dx \neq \text{“Fläche”}$$

Flächenberechnung II

Versuchen wir die Fläche zu berechnen, die von der Funktion $f(x) = \sin x$ und der x-Achse auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ eingeschlossen wird, zu berechnen.

1. naiver (falscher) Versuch:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = -1 + 1 = 0$$

was wohl nicht ganz sein kann ...

Flächenberechnung II

Versuchen wir die Fläche zu berechnen, die von der Funktion $f(x) = \sin x$ und der x-Achse auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ eingeschlossen wird, zu berechnen.

1. naiver (falscher) Versuch:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = -1 + 1 = 0$$

was wohl nicht ganz sein kann ...
Wie Sie sich leicht überzeugen können, gilt

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2 \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -2$$

$\sin x$ hat zwischen $0 \leq x \leq \pi$ positives, zwischen $\pi \leq 2\pi$ negatives Vorzeichen. Die beiden entsprechenden bestimmten Integrale heben sich auf.

Flächenberechnung II

Versuchen wir die Fläche zu berechnen, die von der Funktion $f(x) = \sin x$ und der x-Achse auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ eingeschlossen wird, zu berechnen.

1. naiver (falscher) Versuch:

$$\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = -1 + 1 = 0$$

was wohl nicht ganz sein kann ...
Wie Sie sich leicht überzeugen können, gilt

$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2 \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = -2$$

$\sin x$ hat zwischen $0 \leq x \leq \pi$ positives, zwischen $\pi \leq 2\pi$ negatives Vorzeichen. Die beiden entsprechenden bestimmten Integrale heben sich auf.
2. Versuch: Wie kommen wir also zur gesuchten Fäche? Wir müssen das gewünschte Intervall in Teilstücke zerlegen, auf denen die Funktion das Vorzeichen nicht wechselt. Danach berechnen wir für diese Teilstücke die bestimmten Integrale, und addieren die *Beträge* der Integrale (Flächen sind per Definition immer positiv!). Für unser Beispiel, $\sin x$ findet der Vorzeichenwechsel bei π statt, d.h., wir kennen die Teilintegrale. Die gewünschte Fläche erhalten wir somit gemäß

$$A = \left| \int_0^{\pi} \sin x\, dx \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx \right| = |+2| + |-2| = 4$$

Flächenberechnung III

In Verallgemeinerung des vorigen Beispiels läßt sich leicht folgende Regel zur Berechnung des Flächeninhalts, der von einer Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ und der $x - Achse$ eingeschlossen wird, angeben:

$f(x)$ habe auf dem Intervall $[a, b]$ an den Stellen $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ Nullstellen (d.h., an diesen Stellen wechselt $f(x)$ das Vorzeichen!). Die gesuchte Fläche ergibt sich somit als

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x)\, dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| + \ldots \left| \int_{x_N}^{b} f(x)\, dx \right|$$

Flächenberechnung III

In Verallgemeinerung des vorigen Beispiels läßt sich leicht folgende Regel zur Berechnung des Flächeninhalts, der von einer Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ und der $x - Achse$ eingeschlossen wird, angeben:

$f(x)$ habe auf dem Intervall $[a, b]$ an den Stellen $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ Nullstellen (d.h., an diesen Stellen wechselt $f(x)$ das Vorzeichen!). Die gesuchte Fläche ergibt sich somit als

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x)\, dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| + \ldots \left| \int_{x_N}^{b} f(x)\, dx \right|$$

Praktischer Hinweis: Bitte verwechseln Sie nicht Fächeninhalt mit bestimmten Integral. Bei Prüfungen lesen Sie bitte die Angabe genau und berechnen Sie (nur) das, was gefragt ist!

Stammfunktion — bestimmtes Integral — unbestimmtes Integral

Wir haben uns jetzt sowohl mit dem Suchen von Stammfunktionen und dementsprechend dem Berechnen von unbestimmten Integralen, als auch mit bestimmten Integralen beschäftigt. Der Hauptsatz, der die Berechnung von bestimmten Integralen auf die Differenz der Stammfunktionen des Integranden an den Endpunkten reduziert, erlaubt jetzt auf einfache Weise den Zusammenhang zwischen bestimmten und unbestimmten Integral zu zeigen:
Wir starten wie üblich mit dem Hauptsatz

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

nur nehmen wir jetzt statt der fixen oberen Grenze b eine variable obere Grenze t, d.h.,

$$\int_a^t f(x)\,dx = F(t) - F(a)$$

Erinnern Sie sich, daß bei bestimmten Integralen die Integrationsvariable ein Platzhalter ist, d.h., wir können den Integrand auch in t schreiben, und die variable obere Grenze x nennen, d.h.,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

Vergleichen Sie das mit dem unbestimmten Integral

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

so sieht man, daß das unbestimmte Integral eigentlich nur eine Abkürzung des bestimmten Integrals mit variabler oberer Grenze ist, d.h.

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a) = F(x) + C$$

mit $C = -F(a)$.

"Spielereien" mit dem Hauptsatz der Integralrechnung

Beginnen wir mit der "Langform" des unbestimmten Integrals

$$\int_a^{x} f(t)\,dt = F(x) - F(a) \quad (= F(x) + C)$$

Beachten Sie, daß die Variable x in der Stammfunktion $F(x)$ die variable obere Grenze des Integrals ist, *nicht* der Platzhalter t im Integrand $f(t)$! Als nächstes differenzieren wir das Integral mit variabler oberer Grenze nach eben dieser oberen Grenze, d.h.,

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}[F(x) - F(a)] = \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (*)$$

Effektiv erhalten wir also wieder den Zusammenhang zwischen Stammfunktion und Integrand. Gleichung (*) ist übrigens eine alternative Form des Hauptsatzes der Integralrechnung.

Im praktischen Rechnen braucht man den Zwischenschritt $\frac{dF(x)}{dx}$ nicht, d.h., man kann direkt schreiben

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x} t^2\,dt = x^2$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x} e^{t^2}\,dt = e^{x^2}$$

Beachten Sie, daß Sie im letzten Beispiel die Stammfunktion zu e^{x^2} nicht einmal anschreiben könnten (sie aber auch nicht benötigen!).

“Spielereien” mit dem Hauptsatz der Integralrechnung II

Noch ein paar Variationen zum Thema ...

1. Tausch der Grenzen

$$\frac{d}{dx}\int_x^a f(t)\,dt = \frac{d}{dx}[F(a) - F(x)] = -\frac{dF(x)}{dx} = -f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^a t^2\,dt = -x^2$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^a e^{t^2}\,dt = -e^{x^2}$$

2. Variable Grenze ist Funktion von x

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}[F(g(x)) - F(a)] = \frac{dF(g(x))}{dx} = f(g(x))g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\sin(x)} t^2\,dt = \sin^2 x\,\cos x$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt = e^{(\sqrt{x})^2}\,\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{e^x}{2\sqrt{x}}$$

3. Zur Erinnerung: Ein bestimmtes Integral ist eine Zahl, daher

$$\frac{d}{dx}\int_{-2}^{5} e^{t^2}\,dt = 0$$

Voraussetzungen für Integrierbarkeit / Existenz von Stammfunktion

Etwas spät, aber doch: *Jede in einem zusammenhängenden Intervall stetige Funktion besitzt dort eine Stammfunktion. Im Falle von Unstetigkeitsstellen wird das Intervall in Teilintervalle zerlegt, in denen die Ausgangsfunktion stetig ist.*

Da e^{x^2} überall stetig ist, gibt es daher eine Stammfunktion! Nur läßt sie sich nicht mit den uns bekannten Funktionen schreiben (analoges gilt übrigens auch für $\sin(x^2)$, $\cos(x^2)$). Die Stammfunktion hat die Form

$$\int_a^x e^{t^2}\, dt$$

Wenn Ihnen danach ist, so dürfen Sie eine Abkürzung Ihrer Wahl einführen, z.B. $\Psi(x) = \int_a^x e^{t^2}\, dt$. Für die Ableitung von $\Psi(x)$ gilt: $(\Psi(x))' = e^{x^2}$.[2]

Zu allfälligen Unstetigkeitsstellen: (1) Der normale Integralbegriff versagt, wenn eine Funktion unendlich viele Unstetigkeitsstellen auf einem Intervall hat. (2) Eine (isolierte) Unstetigkeitsstelle mag formal kein Problem sein. Aber Achtung: will man ein bestimmtes Integral mit dem Hauptsatz ($\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$) berechnen, und ist $f(x)$ irgendwo im Intervall $[a, b]$ unstetig, dann ist Vorsicht geboten!

---

[2] Denken Sie in diesem Zusammenhang an die Verteilungsfunktion der normierten Normalverteilung, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}\, dt$! Zu $-\infty$ als Integrationsgrenze mehr in Kürze!

Uneigentliche Integrale

Hinweis: Wir verlassen zum 1. Mal den AHS Stoff!
Ein Beispiel zur Illustration der eben ausgesprochenen Warnung:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{+1} = -(1-(-1)) = -2 \qquad \text{Achtung, falsch!}$$

Selbst ohne meine Warnung sollte Ihnen das Ergebnis verdächtig vorkommen. Der Integrand $1/x^2$ ist überall positiv, dennoch ist das bestimmte Integral negativ. Das Problem ist die Unstetigkeitsstelle (Definitionslücke) des Integranden bei $x = 0$. Erinnern Sie sich, daß für ein bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \qquad a < c < b$$

für jedes beliebige c gelten muß.

Daher wollen wir

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\, dx + \int_{0}^{+1} \frac{1}{x^2}\, dx \qquad (*)$$

überprüfen. Jetzt beginnt das Problem klar zu werden, denn die Stammfunktion $-1/x$ ist für $x = 0$ nicht definiert. Um dieser Schwierigkeit formal Herr zu werden, bedienen wir uns des Grenzwertformalismus und untersuchen

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{\alpha} \frac{1}{x^2} dx = -\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\alpha} = -\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{1}{\alpha} - \left(\frac{1}{-1}\right)\right) = -1 - \underbrace{\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}}_{\text{existiert nicht!}}$$

Uneigentliche Integrale II

Da also $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx$ nicht existiert, ist auch die Zerlegung (*) nicht möglich. In einem solchen Fall gilt aber der Hauptsatz nicht, und unsere naive Rechnung $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2}\,dx = -2$ ist so sinnvoll wie eine Division durch Null!

Bestimmte Integrale $\int_a^b f(x)dx$, bei denen der Integrand im Intervall $[a, b]$ eine (oder mehrere) Unstetigkeitsstelle(n) hat, sind keine bestimmten Integrale sondern *uneigentliche Integrale*. Derartige uneigentliche Integrale können, müssen aber keinen Wert haben. Man sagt, ein uneigentliches Integral existiert oder existiert nicht. Die Existenz eines uneigentlichen Integrals ist formal mittels Grenzwertformalismus zu untersuchen.

Fall 1: Integrand ist an der oberen Grenze unstetig: In diesem Fall ist

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to b} \int_a^{\alpha} f(x)dx$$

zu untersuchen. (Analoges gilt für Unstetigkeit an der unteren Grenze a). Wir haben eben ein Beispiel gesehen, wo ein derartiges Integral nicht existiert. Hingegen

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\alpha \to 0} \int_{\alpha}^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\alpha \to 0} 2\sqrt{x}\Big|_{\alpha}^{2} = 2\sqrt{2} - \underbrace{\lim_{\alpha \to 0} 2\sqrt{\alpha}}_{0} = 2\sqrt{2}$$

existiert!

Uneigentliche Integrale III

Wenn Sie die beiden Beispiele, $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} dx$ und $\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ vergleichen, so ist in beiden Fällen der Integrand bei $x = 0$ nicht definiert. Im ersten Fall existiert auch die Stammfunktion bei $x = 0$ nicht, im zweiten Fall hingegen schon. In der Praxis reicht es normalerweise zu testen, ob die Stammfunktion an der Problemstelle existiert.

Fall 2: Integrand ist an einem Zwischenpunkt c, $a < c < b$ unstetig: Das Integral ist an der Stelle c aufzuspalten, d.h., es ist

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to c} \int_a^\alpha f(x)dx + \lim_{\alpha \to c} \int_\alpha^b f(x)dx$$

zu untersuchen — *beide* Teilintegrale (Grenzwerte) müssen existieren. In der Praxis reicht es, die Existenz der Stammfunktion an der Problemstelle $x = c$ zu überprüfen! Besteht ein uneigentliches Integral diesen Test, so kann es ganz normal mittels Hauptsatz berechnet werden. Beispiel: Gesucht sei

$$\int_{-1}^{+2} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

Der Integrand ist für $x = 0$ nicht definiert; die Stammfunktion $\frac{3}{2}x^{2/3}$ hingegen schon. *Daher* kann das Integral "normal" (mittels Hauptsatz) auch über die Unstetigkeitsstelle hinweg(!)

$$\int_{-1}^{+2} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{3}{2}\left(2^{2/3} - (-1)^{2/3}\right) = \sqrt[3]{4} - 1$$

berechnet werden.

Uneigentliche Integrale der 2. Art

Ein zweiter Typ von uneigentlichen Integralen tritt auf, wenn eine Integrationsgrenze $\pm\infty$ ist. Derartige Integrationsgrenzen sind als (uneigentlicher) Grenzwert zu interpretieren, z.B.

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha e^{-x}\,dx$$

Führen wir die Rechnung durch:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha e^{-x}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^\alpha = \lim_{\alpha\to\infty} e^{-x}\Big|_\alpha^0 = 1 - \underbrace{\lim_{\alpha\to\infty} e^{-\alpha}}_{=0} = 1$$

Ist ein Grenzwert dieser Art endlich, so sagt man das Integral existiert und hat einen bestimmten Wert.

Derartige Integrale existieren natürlich nicht immer:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty}\int_1^\alpha \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty} \ln x\Big|_1^\alpha = \lim_{\alpha\to\infty} \ln x - 0 = \text{“}+\infty\text{”}$$

Der Grenzwert $\lim_{\alpha\to\infty} \ln x$ strebt gegen $+\infty$ (für große x wächst $\ln x$ (langsam aber doch) über alle Maße), daher existiert das Integral nicht!

Uneigentliche Integrale — Abschlußbemerkung

Die gebrachten Beispiele sind möglicherweise ein wenig irreführend, da (zu) einfach: Uneigentliche Integrale können recht rasch recht kompliziert werden. Bei Fragen oder Unklarheiten hilft Ihr freundlicher Mathematiker. Ihre wichtigste Aufgabe ist es, unbestimmte Integrale zu erkennen, d.h., zu bemerken, daß z.B. mit $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2}\,dx$ etwas faul ist, und (zumindest qualitativ) zu verstehen, was z.B. mit $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$ gemeint ist!

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "**Document**", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "**you**". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "**Modified Version**" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "**Secondary Section**" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "**Invariant Sections**" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "**Cover Texts**" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "**Transparent**" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "**Opaque**".
Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.
The "**Title Page**" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.
A section "**Entitled XYZ**" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "**Acknowledgements**", "**Dedications**", "**Endorsements**", or "**History**".) To "**Preserve the Title**" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.
The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.
You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.
If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.
It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.

C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.

D. Preserve all the copyright notices of the Document.

E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.

F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.

G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

H. Include an unaltered copy of this License.

I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.

J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.

K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.

L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.

M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.

N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.

O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.
You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties–for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.
You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.
The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.
The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.
In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.
You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.
If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.
If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/.
Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

> *Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".*

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with ... Texts." line with this:

> *with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.*

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.
If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.