Funktionen I: Differentiation

Stefan Boresch

Department of Computational Biological Chemistry
Faculty of Chemistry
University of Vienna

October 20, 2009

Was ist eine Funktion?

Die Naturwissenschaften beschäftigen sich mit dem Studium von Zusammenhängen zwischen Größen, z.B. erhöht sich der Druck eines Gases, wenn man die Temperatur erhöht, chemische Prozesse verlangsamen sich, wenn man die Temperatur senkt usw.

Die mathematische Abstraktion solcher Zusammenhänge führt zum Konzept der Funktion. Ganz allgemein ist eine Funktion *eine Vorschrift, die jedem Element x einer Menge* **A** *in* eindeutiger *Weise ein Element y einer Menge* **B** *zuordnet.* Diese Vorschrift kann

- in mathematischer Schreibweise erfolgen ($y = f(x)$, z.B. $y = x^2$),
- verbal erfolgen ("Der Preis von g Gramm Extrawurst berechnet sich aus der Menge in Gramm multipliziert mit dem Sortenpreis S (pro Gramm), z.B. wenn $S = 7$ cent/g, dann kosten fünf Gramm Extrawurst $5 \times 7 = 35$ cent."),
- aus einer Tabelle bestehen (z.B. Tabelle von (eigenen) Meßdaten oder Tabellen in 'CRC Handbook of Chemistry and Physics'),
- aus einem Graphen bestehen (z.B. graph. Darstellung einer Messung, Absorption als Funktion der Zeit).

Zum Funktionsbegriff

Unter Verwendung der mathematischen Schreibweise $y = f(x)$ bezeichnet man x als die *unabhängige*, und y als die *abhängige* Veränderliche (Variable); diese Unterscheidung gilt natürlich auch für die anderen Arten, eine Funktion einzuführen. Die Mengen **A** und **B** können i.a. durchaus endlich bzw. diskret sein. Bei Tabellen ist dies z.B. notwendigerweise der Fall (die Funktion ist nur für die tabellierten Werte definiert!). In der Wahrscheinlichkeitsrechnung nimmt die *Zufallsvariable* eine zentrale Rolle ein: trotz ihres Namens handelt es sich dabei um eine Funktion, die jedem Element des Ereignisraums einen Wert zuweist (z.B. die Augenzahl bei Würfeln mit einem Würfel, oder 1 bzw. 0 für Erfolg/Mißerfolg in einem Bernoulliexperiment).

Wir beschäftigen uns zunächst mit Funktionen *einer* reellen Veränderlichen,[1] d.h., sowohl unsere Startgröße x, als auch der Funktionswert sind Elemente von $\mathbb{R}$. Weiters nehmen wir an, daß die Mengen **A** und **B** (unendliche) Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind. Dies ist gerade in der Biologie oft eine Abstraktion, es gibt z.B. keine halben Zellen. Umgekehrt ist der praktische Unterschied zw. 10^{10} und $10^{10} + 1$ Zellen so gering, daß man ruhigen Gewissens so tun darf, als ob auch $10^{10} + 0.1$ Zellen sinvoll wären. Auf Grund dieser Voraussetzung sind aber die Techniken, die wir entwickeln werden, etwas eingeschränkt und erlauben z.B. keine systematische Behandlung von Zufallsvariablen!

[1] In der Praxis hängt eine Größe fast immer von mehr als einer Veränderlichen ab — wir werden Funktionen mehrerer (reeller) Veränderlicher separat besprochen.

Eindeutigkeit

Ein ganz entscheidender Punkt der eine "Funktion" erst zu einer Funktion im mathematischen Sinne macht, ist die *Eindeutigkeit*, mit der der unabhängigen Veränderlichen x *genau ein* Wert zugewiesen wird.

Nehmen Sie an, Sie und ein(e) KollegIn kaufen sich eine Extrawurstsemmel. In beiden Fällen zeigt die Waage exakt 5g an. Wenn der Verkäufer von Ihnen und Ihrer/m KollegIn unterschiedlich viel Geld will, dann "hat's was"...

Mathematischeres Beispiel: Quadratwurzel. Sie wissen, daß sowohl $+2$ als auch -2 Quadratwurzeln von 4 sind, d.h., $\sqrt{4} = \pm 2$. Für die Definition einer Wurzelfunktion ist dies jedoch ein Problem, denn somit gibt es für jedes x zwei mögliche Funktionswerte. Um zur Wurzelfunktion zu kommen, müssen Sie also dazusagen, welchen der beiden Äste (positive oder negative Wurzel) Sie haben möchten. Deshalb schreibt man oft $f(x) = +\sqrt{x}$ bzw. $f(x) = -\sqrt{x}$.

Definitionsmenge, Wertemenge

Für eine Funktion

$$y = f(x)$$

bilden alle x-Werte, denen sich y-Werte zuordnen lassen den Definitionsbereich (die Definitionsmenge) D von $f(x)$. Die y-Werte bilden den Wertebereich (die Wertemenge) W. Die Bestimmung von D ist wichtig — folgende Faustregeln sind zu beachten:

- Keine "verbotenen" Operationen (Division durch Null, Logarithmus von Null, $\tan(\pi/2)$ usw.)
- Das Ergebnis der Funktion muß reell sein, d.h., z.B. keine Wurzel eines negativen Arguments, kein Logarithmus einer negativen Zahl usw.

Über diese mathematischen Voraussetzungen hinaus, hat man in Anwendungen oft zusätzliche Einschränkungen. Beispiel: Die Funktion

$$c = c(t) = c_0 e^{-kt}, \qquad c_0,\ k \text{ reelle Konstanten}$$

beschreibt die Konzentration c einer Substanz als Funktion der Zeit t, wenn die Reaktion einer Kinetik erster Ordnung gehorcht. Mathematisch ist die Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Chemisch/biologisch sinnvoll sind allerdings nur Werte der unabhängigen Variablen $t \geq 0$ (Bei $t = 0$ starten Sie Ihr Experiment, eine negative Zeit ist in diesem Kontext sinnlos!)

Beispiele zu Definitions- und Wertemenge

Bitte überlegen Sie sich genau, warum die folgenden Definitions- und Wertemengen gelten!

$f(x) =$	D	W
x^3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^4	$\mathbb{R}$	$y \geq 0$
$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\ln x$	$x > 0$	$\mathbb{R}$
$+\sqrt{x-2}$	$x \geq 2$	$y \geq 0$
$\frac{1}{+\sqrt{x-2}}$	$x > 2$	$y > 0$
$\frac{\tan(x)}{\ln(x-2)}$	$x > 2$, $x \neq 3$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ mit $(k \geq 1)$	$\mathbb{R}$

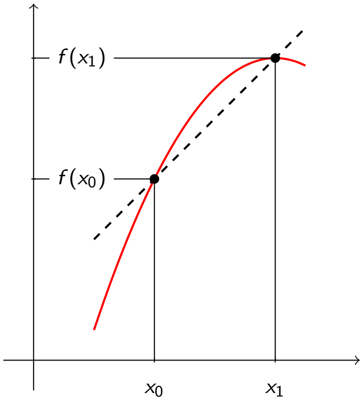
Anmerkung zum letzten Beispiel: Nur für $x > 2$ ist Argument des Logarithmus positiv und ungleich Null. Für $x = 3$ wird der Logarithmus Null und somit entstünde eine Division durch Null. $\tan(x)$ ist für $(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ nicht definiert. Da jedoch $x > 2$ genügt $k \geq 1$!

Eigenschaften von Funktionen

An dieser Stelle müßten zunächst Eigenschaften von Funktionen diskutiert werden, z.B. Monotonie, Periodizität, gerade/ungerade Funktion usw. Aus Zeitgründen muß ich Sie jedoch auf das Skriptum, die Formelsammlung oder auch Ihre AHS Lehrbücher verweisen.

Zunächst noch ein paar kurze Anmerkungen zu Grenzwerten und Stetigkeit, bevor wir uns der Differentiation zuwenden. Auch hier geht es hpts. um Begriffsbildung, es wird nicht von Ihnen verlangt werden, daß Sie aktiv einen Grenzwert berechnen oder mathematisch exakt eine Funktion auf Stetigkeit überprüfen.

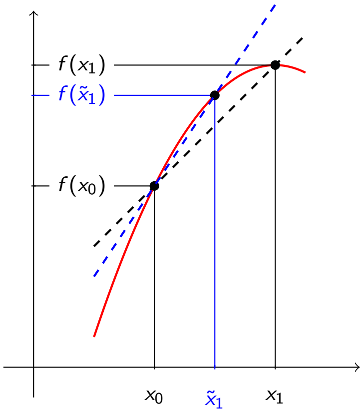
Warum Grenzwerte? — Steigung der Tangente



$$k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Für die dargestellte Situation ist k die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$.

Warum Grenzwerte? — Steigung der Tangente

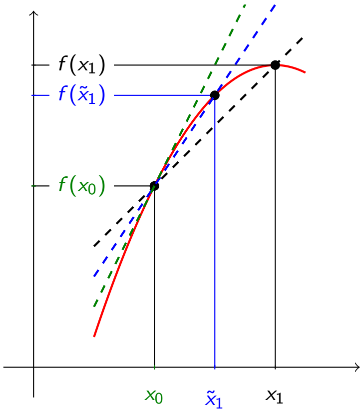


$$k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\tilde{k} = \frac{f(\tilde{x}_1) - f(x_0)}{\tilde{x}_1 - x_0}$$

Für die dargestellte Situation ist k die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$. Um die Steigung der Tangente an die Funktion an der Stelle x_0 zu finden, läßt man x_1 and x_0 rutschen, gezeigt durch $x_1 \to \tilde{x}_1$.

Warum Grenzwerte? — Steigung der Tangente



$$k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\tilde{k} = \frac{f(\tilde{x}_1) - f(x_0)}{\tilde{x}_1 - x_0}$$

Steigung der Tangente?

Für die dargestellte Situation ist k die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$. Um die Steigung der Tangente an die Funktion an der Stelle x_0 zu finden, läßt man x_1 and x_0 rutschen, gezeigt durch $x_1 \to \tilde{x}_1$. Dieses Vorgehen scheitert jedoch genau dort wo es spannend ist, nämlich für $x_1 = x_0$, da es dann im Ausdruck für k zu einer Division durch Null kommt...

Warum Grenzwerte? — Untersuchung von Problemstellen

Untersuchung einer Funktion in der Nähe von Definitionslücken:

$$f(x) = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$$

Warum Grenzwerte? — Untersuchung von Problemstellen

Untersuchung einer Funktion in der Nähe von Definitionslücken:

$$f(x) = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$$

Klarerweise: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$

Warum Grenzwerte? — Untersuchung von Problemstellen

Untersuchung einer Funktion in der Nähe von Definitionslücken:

$$f(x) = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$$

Klarerweise: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$

Funktionswerte nahe $x = +\sqrt{2} \approx 1.414213562$

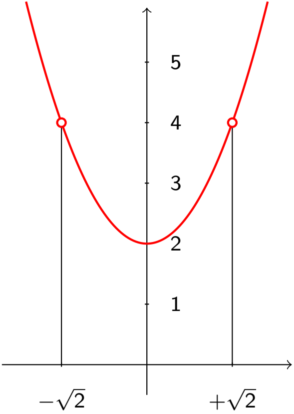
x	1.4100	1.4140	1.41420	...	1.4143	1.4150	1.4200
f(x)	3.9881	3.9994	3.99996	...	4.0002	4.0022	4.0164

Warum Grenzwerte? — Untersuchung von Problemstellen

Untersuchung einer Funktion in der Nähe von Definitionslücken:

$$f(x) = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$$

Klarerweise: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$



Funktionswerte nahe $x = +\sqrt{2} \approx 1.414213562$

x	1.4100	1.4140	1.41420	...	1.4143	1.4150	1.4200
f(x)	3.9881	3.9994	3.99996	...	4.0002	4.0022	4.0164

Nähert man sich z.B. $x \to +\sqrt{2}$, so geht der Funktionswert offensichtlich gegen 4.

Grenzwerte

- Die beiden gezeigten Beispiele verdeutlichen, daß ein systematisches Werkzeug hilfreich wäre, um das Verhalten von Funktionen zu verstehen, selbst z.B. in der Nähe von Definitionslücken. Dieses Werkzeug bietet uns das Konzept des Grenzwerts:

[2] Das richtige Ergebnis ist $\frac{1}{6}$!

Grenzwerte

- Die beiden gezeigten Beispiele verdeutlichen, daß ein systematisches Werkzeug hilfreich wäre, um das Verhalten von Funktionen zu verstehen, selbst z.B. in der Nähe von Definitionslücken. Dieses Werkzeug bietet uns das Konzept des Grenzwerts:
- Die Funktion $y = f(x)$ sei in einer Umgebung von a, eventuell mit Ausnahme von a, definiert. Die Funktion besitzt an der Stelle $x = a$ den Grenzwert oder Limes A, in Zeichen

  $$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{oder} \quad f(x) \to A \text{ für } x \to a$$

  wenn sich die Funktion $f(x)$ bei unbegrenzter Annäherung von x an a (von "links" als auch von "rechts") unbegrenzt an A nähert. Die Funktion $f(x)$ braucht an der Stelle $x = a$ den Wert A nicht anzunehmen und braucht an dieser Stelle auch nicht definiert zu sein.

[2] Das richtige Ergebnis ist $\frac{1}{6}$!

Grenzwerte

- Die beiden gezeigten Beispiele verdeutlichen, daß ein systematisches Werkzeug hilfreich wäre, um das Verhalten von Funktionen zu verstehen, selbst z.B. in der Nähe von Definitionslücken. Dieses Werkzeug bietet uns das Konzept des Grenzwerts:
- Die Funktion $y = f(x)$ sei in einer Umgebung von a, eventuell mit Ausnahme von a, definiert. Die Funktion besitzt an der Stelle $x = a$ den Grenzwert oder Limes A, in Zeichen

  $$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{oder} \quad f(x) \to A \text{ für } x \to a$$

  wenn sich die Funktion f(x) bei unbegrenzter Annäherung von x an a (von "links" als auch von "rechts") unbegrenzt an A nähert. Die Funktion f(x) braucht an der Stelle $x = a$ den Wert A nicht anzunehmen und braucht an dieser Stelle auch nicht definiert zu sein.
- Die Untersuchung von Grenzwerten kann recht knifflig werden, es ist nicht — wie das letzte Beispiel möglicherweise irrtümlich suggeriert — genug, sich Funktionswerte in der Nähe der Problemstelle anzusehen. Probieren Sie sich an

  $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}$$

  indem Sie mit dem Taschenrechner den Funktionswert für $x = 0.01$ und $x = 0.000000001$ berechnen. Was ist Ihre Vermutung für den Grenzwert?[2]

[2] Das richtige Ergebnis ist $\frac{1}{6}$!

Grenzwerte

- Die beiden gezeigten Beispiele verdeutlichen, daß ein systematisches Werkzeug hilfreich wäre, um das Verhalten von Funktionen zu verstehen, selbst z.B. in der Nähe von Definitionslücken. Dieses Werkzeug bietet uns das Konzept des Grenzwerts:
- Die Funktion $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$ sei in einer Umgebung von a, eventuell mit Ausnahme von a, definiert. Die Funktion besitzt an der Stelle $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ den Grenzwert oder Limes A, in Zeichen

$$\lim_{\mathrm{x} \to \mathrm{a}} \mathrm{f(x)} = \mathrm{A} \quad \text{oder} \quad \mathrm{f(x)} \to \mathrm{A} \text{ für } \mathrm{x} \to \mathrm{a}$$

  wenn sich die Funktion f(x) bei unbegrenzter Annäherung von x an a (von "links" als auch von "rechts") unbegrenzt an A nähert. Die Funktion f(x) braucht an der Stelle $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ den Wert A nicht anzunehmen und braucht an dieser Stelle auch nicht definiert zu sein.
- Die Untersuchung von Grenzwerten kann recht knifflig werden, es ist nicht — wie das letzte Beispiel möglicherweise irrtümlich suggeriert — genug, sich Funktionswerte in der Nähe der Problemstelle anzusehen. Probieren Sie sich an

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}$$

  indem Sie mit dem Taschenrechner den Funktionswert für $x = 0.01$ und $x = 0.000000001$ berechnen. Was ist Ihre Vermutung für den Grenzwert?[2]
- In vielen Fällen helfen praktische Rechenregeln, die Sie sich in Ihrer Formelsammlung einmal kurz ansehen sollten...

[2] Das richtige Ergebnis ist $\frac{1}{6}$!

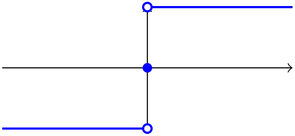
Beispiele zu Grenzwerten

- Unter der Verwendung des Grenzwertkonzepts (und der erwähnten Rechenregeln) können wir für unser früheres Beispiel schreiben:

$$\lim_{x\to+\sqrt{2}} \frac{x4-4}{x^2-2} = \lim_{x\to+\sqrt{2}} \frac{(x^2-2)(x^2+2)}{x^2-2} = \lim_{x\to+\sqrt{2}} x^2+2 = (\sqrt{2})^2+2 = 4$$

  Anmerkungen: (i) Das Kürzen von x^2-2 ist nur erlaubt, weil wir x nie den Wert $+\sqrt{2}$ einnehmen lassen. Ohne den Grenzwertformalismus wäre dies ein schwerer Fehler! (ii) Zum letzten Schritt: Im Prinzip nicht selbstverständlich, aber hier gibt es keinen Grund warum x^2+2 *nicht* gegen 4 gehen sollte, wenn $x\to+\sqrt{2}$, egal ob man sich von Werten $x>+\sqrt{2}$ oder $x<+\sqrt{2}$ nähert. In einem solchen Fall bekommt man den Grenzwert durch "Einsetzen" in die Funktion.

- Obwohl die "Vorzeichen" (signum, sign) Funktion für ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 0}\operatorname{sign}(x)$ aus offensichtlichen Gründen *nicht*!



$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1 & : \ x<0 \\ 0 & : \ x=0 \\ +1 & : \ x>0 \end{cases}$$

Erweiterungen des Grenzwertkonzepts

- Unsere Definition des Grenzwerts behandelt (i) nur das Verhalten einer Funktion wenn x gegen einen endlichen Wert geht, und (ii) existiert der Grenzwert nur, wenn $lim_{x \to a} f(x) = A$ eine endliche Zahl ist. In der Praxis erweisen sich zwei Verallgemeinerungen als nützlich:

Erweiterungen des Grenzwertkonzepts

- Unsere Definition des Grenzwerts behandelt (i) nur das Verhalten einer Funktion wenn x gegen einen endlichen Wert geht, und (ii) existiert der Grenzwert nur, wenn $lim_{x \to a} f(x) = A$ eine endliche Zahl ist. In der Praxis erweisen sich zwei Verallgemeinerungen als nützlich:
- Der Grenzwert
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$
existiert gemäß der strengen Definition nicht, denn der Funktionswert wächst über alle Grenzen für $x \to 0$. Genau dieses "Wachsen über alle Grenzen" wird aber häufig in der Form
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$
abgekürzt.

Erweiterungen des Grenzwertkonzepts

- Unsere Definition des Grenzwerts behandelt (i) nur das Verhalten einer Funktion wenn x gegen einen endlichen Wert geht, und (ii) existiert der Grenzwert nur, wenn $lim_{x \to a} f(x) = A$ eine endliche Zahl ist. In der Praxis erweisen sich zwei Verallgemeinerungen als nützlich:
- Der Grenzwert
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$
existiert gemäß der strengen Definition nicht, denn der Funktionswert wächst über alle Grenzen für $x \to 0$. Genau dieses "Wachsen über alle Grenzen" wird aber häufig in der Form
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$
abgekürzt.
- In quasi-analoger Weise wird die Grenzwertschreibweise einer Funktion verwendet, um das Verhalten für $x \to \pm\infty$ zu beschreiben. So gilt z.B.

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Stetigkeit

- Bevor wir zur Frage der Steigung der Tangente an eine Funktion zurückkehren, sollten wir noch rasch den Begriff der Stetigkeit einführen.

Stetigkeit

- Bevor wir zur Frage der Steigung der Tangente an eine Funktion zurückkehren, sollten wir noch rasch den Begriff der Stetigkeit einführen.
- Die Funktion f(x) ist an der Stelle x = a stetig, wenn

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a),$$

  was bedeutet, daß

Stetigkeit

- Bevor wir zur Frage der Steigung der Tangente an eine Funktion zurückkehren, sollten wir noch rasch den Begriff der Stetigkeit einführen.
- Die Funktion f(x) ist an der Stelle $x = a$ stetig, wenn

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a),$$

  was bedeutet, daß
  - f(a) definiert ist, d.h. $a \in D$ von f(x),

    [Beispiel: $1/x$ ist unstetig bei $x = 0$, $\dfrac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$ bei $x = \pm\sqrt{2}$]

Stetigkeit

- Bevor wir zur Frage der Steigung der Tangente an eine Funktion zurückkehren, sollten wir noch rasch den Begriff der Stetigkeit einführen.
- Die Funktion f(x) ist an der Stelle x = a stetig, wenn

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a),$$

  was bedeutet, daß
  - f(a) definiert ist, d.h. a $\in$ D von f(x),

    [Beispiel: $1/x$ ist unstetig bei $x = 0$, $\dfrac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$ bei $x = \pm\sqrt{2}$]
  - der Grenzwert $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = A$ existiert

    [Beispiel: sign(x) ist unstetig bei $x = 0$, da $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} sign(x)$ nicht existiert.]

Stetigkeit

- Bevor wir zur Frage der Steigung der Tangente an eine Funktion zurückkehren, sollten wir noch rasch den Begriff der Stetigkeit einführen.
- Die Funktion f(x) ist an der Stelle x = a stetig, wenn

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a),$$

  was bedeutet, daß
  - f(a) definiert ist, d.h. a $\in$ D von f(x),

    [Beispiel: $1/x$ ist unstetig bei $x = 0$, $\dfrac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$ bei $x = \pm\sqrt{2}$]
  - der Grenzwert $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = A$ existiert

    [Beispiel: $\text{sign}(x)$ ist unstetig bei $x = 0$, da $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} sign(x)$ nicht existiert.]
  - und dieser Grenzwert A gleich $f(a)$ ist.

    [Beispiel: Die Funktion

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x^4-4}{x^2-2} & x \neq \pm\sqrt{2} \\ 1 & x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

    ist nicht stetig bei $x = \pm\sqrt{2}$, weil z.B. $\lim_{x \longrightarrow \sqrt{2}} f_1(x) = 4 \neq f_1(\sqrt{2}) = 1$
    Hingegen ist

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^4-4}{x^2-2} & x \neq \pm\sqrt{2} \\ 4 & x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

    überall stetig. Man bezeichnet $f_2(x)$ auch als stetige Fortsetzung von $\frac{x^4-4}{x^2-2}$.]

Stetigkeit

- Bevor wir zur Frage der Steigung der Tangente an eine Funktion zurückkehren, sollten wir noch rasch den Begriff der Stetigkeit einführen.
- Die Funktion f(x) ist an der Stelle x = a stetig, wenn

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

  was bedeutet, daß
  - f(a) definiert ist, d.h. a ∈ D von f(x),

    [Beispiel: $1/x$ ist unstetig bei $x = 0$, $\dfrac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$ bei $x = \pm\sqrt{2}$]
  - der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ existiert

    [Beispiel: sign(x) ist unstetig bei $x = 0$, da $\lim\limits_{x \to 0} sign(x)$ nicht existiert.]
  - und dieser Grenzwert A gleich $f(a)$ ist.

    [Beispiel: Die Funktion

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x^4-4}{x^2-2} & x \neq \pm\sqrt{2} \\ 1 & x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

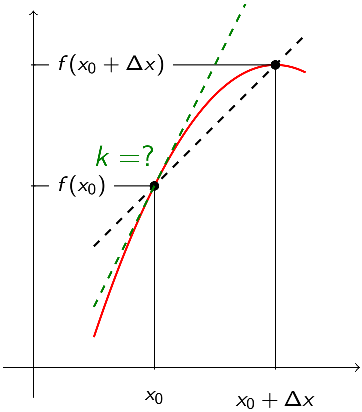
    ist nicht stetig bei $x = \pm\sqrt{2}$, weil z.B. $\lim_{x \to \sqrt{2}} f_1(x) = 4 \neq f_1(\sqrt{2}) = 1$

    Hingegen ist

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^4-4}{x^2-2} & x \neq \pm\sqrt{2} \\ 4 & x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

    überall stetig. Man bezeichnet $f_2(x)$ auch als stetige Fortsetzung von $\frac{x^4-4}{x^2-2}$.]
- **Faustregel:** Eine Funktion ist auf einem Intervall stetig, wenn man den Graph der Funktion auf diesem Intervall *ohne* Absetzen zeichnen kann.

Steigung der Tangente — Ableitung von Funktionen

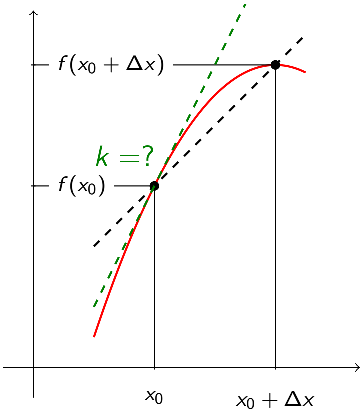


Wir suchen die Steigung der Tangente an die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$. Wie vorher beginnen wir mit der Steigung der Sekante, nur daß wir x_1 als $x_0 + \Delta x$ (also als x_0 plus ein Offset Δx) schreiben:

$$k = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Steigung der Tangente — Ableitung von Funktionen



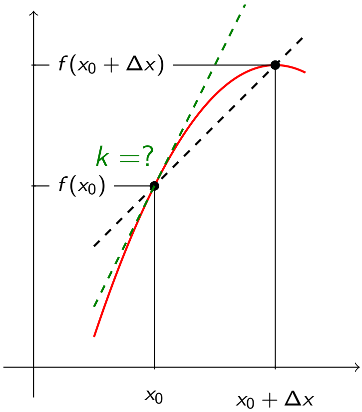
Wir suchen die Steigung der Tangente an die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$. Wie vorher beginnen wir mit der Steigung der Sekante, nur daß wir x_1 als $x_0 + \Delta x$ (also als x_0 plus ein Offset Δx) schreiben:

$$k = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Was uns interessiert ist k für $\Delta x \to 0$.

Steigung der Tangente — Ableitung von Funktionen



Wir suchen die Steigung der Tangente an die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$. Wie vorher beginnen wir mit der Steigung der Sekante, nur daß wir x_1 als $x_0 + \Delta x$ (also als x_0 plus ein Offset Δx) schreiben:

$$k = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Was uns interessiert ist k für $\Delta x \to 0$.

Existiert der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

so bezeichnet man ihn als *Ableitung* der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 und verwendet die Notation $f'(x = x_0)$ oder $\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0}$.

Berechnung der Ableitung

Wir illustrieren das eben Gesagte am konkreten Beispiel der Funktion $f(x) = x^2$. Wir suchen

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[x_0 + \Delta x]^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0$$

Der Grenzwert existiert und somit ist die Ableitung von x^2 an der Stelle x_0 gleich $2x_0$, d.h., Die Steigung der Tangente an die Funktion x^2 an der Stelle x_0 ist $2x_0$.

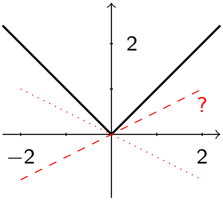
Da wir keinerlei Einschränkung für x_0 gemacht haben, gilt die obige Rechnung für beliebige $x_0 \in \mathbb{R}$, man sagt die Ableitung von x^2 ist $2x$.

Das Berechnen der Ableitung wird auch als Differenzieren bezeichnet.

Welche Funktionen sind differenzierbar

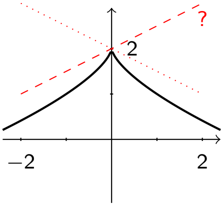
- Die notwendige Voraussetzung für Differenzierbarkeit ist *Stetigkeit* — eine Funktion kann nur dort differenziert werden, wo sie stetig ist ($\mathrm{sign}(x)$ kann an der Stelle $x = 0$ nicht differenziert werden, da an dieser Stelle unstetig). Darüberhinaus gibt es Fälle, in denen eine stetige Funktion an bestimmten Stellen *nicht* differenzierbar ist!
- Beispiele:

$f(x) = |x|$



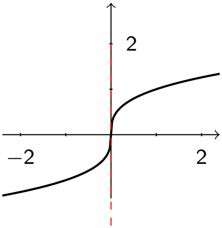
$f'(x = 0) = ?$

$f(x) = 2 - x^{2/3}$



$f'(x = 0) = ?$

$f(x) = x^{1/3}$



$f'(x = 0) = \text{“}\infty\text{”}$

Rechenregeln der Differentiation

Im Prinzip kann man jede (differenzierbare) Funktion wie im x^2 Beispiel durch Grenzwertbildung differenzieren. In der Praxis ist das nicht nur mühsam, sondern wäre auch sehr repetitiv. Stattdessen verwendet man Regeln für die Ableitung elementarer Funktionen zusammen mit Regeln für das Differenzieren zusammengesetzter Funktionen. Einige wichtige finden Sie in der folgenden Tabelle — ansonsten bitte Formelsammlung bemühen

$f(x)$	$f'(x)$
c (Konstante)	0
x	1
$x^a,\ a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Name	Regel
Faktorregel	$[c\,f(x)]' = c\,f'(x)$
Summenregel	$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
Produktregel	$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Kettenregel	$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$

Beispiele zum Differenzieren

1. $[x^5]' = 5x^4$

Beispiele zum Differenzieren

1. $[x^5]' = 5x^4$
2. $[\sqrt[3]{x}]' = [x^{1/3}]' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Beispiele zum Differenzieren

1. $[x^5]' = 5x^4$
2. $[\sqrt[3]{x}]' = [x^{1/3}]' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
3. $[x^3 + \sin x]' = 3x^2 + \cos x$

Beispiele zum Differenzieren

1. $[x^5]' = 5x^4$
2. $[\sqrt[3]{x}]' = [x^{1/3}]' = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
3. $[x^3 + \sin x]' = 3x^2 + \cos x$
4. $[x^3\ \sin x]' = 3x^2 \sin x + x^3\ \cos x$

Beispiele zum Differenzieren

1. $[x^5]' = 5x^4$
2. $[\sqrt[3]{x}]' = [x^{1/3}]' = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
3. $[x^3 + \sin x]' = 3x^2 + \cos x$
4. $[x^3\ \sin x]' = 3x^2 \sin x + x^3\ \cos x$
5. $[\sin(x^2)]' = \cos(x^2)\,2x = 2x\cos(x^2)$ (sin() ist äußere, x^2 ist innere Funktion)

Beispiele zum Differenzieren

1. $[x^5]' = 5x^4$
2. $[\sqrt[3]{x}]' = [x^{1/3}]' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
3. $[x^3 + \sin x]' = 3x^2 + \cos x$
4. $[x^3\ \sin x]' = 3x^2 \sin x + x^3\ \cos x$
5. $[\sin(x^2)]' = \cos(x^2)\, 2x = 2x \cos(x^2)$ (sin() ist äußere, x^2 ist innere Funktion)
6. $[e^{-5x}]' = e^{-5x}\,(-5) = -5e^{-5x}$ Gerade in einfachen Fällen NICHT auf innere Ableitung vergessen!

Beispiele zum Differenzieren

1. $[x^5]' = 5x^4$
2. $[\sqrt[3]{x}]' = [x^{1/3}]' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
3. $[x^3 + \sin x]' = 3x^2 + \cos x$
4. $[x^3 \ \sin x]' = 3x^2 \sin x + x^3 \ \cos x$
5. $[\sin(x^2)]' = \cos(x^2)\, 2x = 2x\cos(x^2)$ (sin() ist äußere, x^2 ist innere Funktion)
6. $[e^{-5x}]' = e^{-5x}\,(-5) = -5e^{-5x}$ Gerade in einfachen Fällen NICHT auf innere Ableitung vergessen!
7. Die Kettenregel ist beliebig schachtelbar ...

   $$[e^{\sqrt{1-x^2}}]' = e^{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x\,e^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}$$

Beispiele zum Differenzieren

1. $[x^5]' = 5x^4$
2. $[\sqrt[3]{x}]' = [x^{1/3}]' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
3. $[x^3 + \sin x]' = 3x^2 + \cos x$
4. $[x^3 \ \sin x]' = 3x^2 \sin x + x^3 \ \cos x$
5. $[\sin(x^2)]' = \cos(x^2)\, 2x = 2x\cos(x^2)$ (sin() ist äußere, x^2 ist innere Funktion)
6. $[e^{-5x}]' = e^{-5x}\,(-5) = -5e^{-5x}$ Gerade in einfachen Fällen NICHT auf innere Ableitung vergessen!
7. Die Kettenregel ist beliebig schachtelbar ...
   $$[e^{\sqrt{1-x^2}}]' = e^{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x\,e^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}$$
8. **Wichtige Zusatzregel:** Hausverstand einschalten und wenn möglich Funktion vor dem Losrechnen vereinfachen!
   $[\sin x \cos x]' = [\frac{1}{2}\sin(2x)]' = \frac{1}{2}\cos(2x)2 = \cos(2x)$ (Trig. Identität $sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Nat. geht's auch mit der Produktregel. . .)

Ergänzungen

- Produkt von drei (oder mehr) Funktionen: Die Produktregel läßt sich ebenfalls erweitern:

$$[f\,g\,h]' = [f\,(g\,h)]' = f'\,(g\,h) + f\,(g\,h)' = f'\,(g\,h) + f\,(g'\,h + g\,h') =$$
$$= f'\,g\,h + f\,g'\,h + f\,g\,h'$$

Ergänzungen

- Produkt von drei (oder mehr) Funktionen: Die Produktregel läßt sich ebenfalls erweitern:

$$[f\,g\,h]' = [f\,(g\,h)]' = f'\,(g\,h) + f\,(g\,h)' = f'\,(g\,h) + f\,(g'\,h + g\,h') =$$
$$= f'\,g\,h + f\,g'\,h + f\,g\,h'$$

- Quotientenregel
  Diese folgt aus den bis jetzt gebrachten Differentiationsregeln — Auswendiglernen nicht unbedingt nötig:

$$\left[\frac{f}{g}\right]' = \underbrace{[f\,g^{-1}]'}_{\text{Produktregel}} = f'\,g^{-1} + f\,[g^{-1}]' = f'\,g^{-1} - f\,g^{-2}\,g' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$$

  Passen Sie auf die innere Ableitung von g im vorletzten Schritt auf! $g^{-1} = 1/g$, nicht die Umkehrfunktion von g!

  Die Quotientenregel wird oft an falscher Stelle verwendet. Z.B. genügt für

$$\left[\frac{1}{x^2}\right]' = [x^{-2}]' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

  die Ableitungsregel für Potenzen. Eine legitime Anwendung der Quotientenregel hingegen ist die Ableitung des Tangens:

$$[\tan x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{\cos x\,\cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

  NB: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$!

Ableitung von Umkehrfunktionen

In unserer Besprechung der Ableitung fehlen Regeln für das Ableiten der Umkehrfunktionen, d.h., z.B. die Ableitungen von $\ln x$, $\arcsin x$ usw. Sie finden diese in Ihrer Formelsammlung, es ist aber recht instruktiv sich die Ableitungsregeln selbst zu erarbeiten. Die zentrale Idee ist, daß

$$\varphi(f(x)) = f(\varphi(x)) = x$$

gilt (natürlich unter Berücksichtigung der jeweiligen Definitionsbereiche!), wobei φ die Umkehrfunktion (inverse Funktion) zu f bezeichnet. Durch Differentiation der linken und rechten Seite obiger Identität kann man die Ableitungsregel für das jeweilige φ ermitteln. Beispiele:

- $[\ln x]' = ?$

Anmerkung: $\exp(x) = e^x$

$$\exp(\ln x) = x, \quad \Rightarrow \quad [\exp(\ln x)]' = [x]'$$

$$\exp(\ln x)\,[\ln x]' = 1 \quad \Rightarrow \quad x\,[\ln x]' = 1$$

$$\Rightarrow [\ln x]' = \frac{1}{x}$$

Ableitung von Umkehrfunktionen

In unserer Besprechung der Ableitung fehlen Regeln für das Ableiten der Umkehrfunktionen, d.h., z.B. die Ableitungen von $\ln x$, $\arcsin x$ usw. Sie finden diese in Ihrer Formelsammlung, es ist aber recht instruktiv sich die Ableitungsregeln selbst zu erarbeiten. Die zentrale Idee ist, daß

$$\varphi(f(x)) = f(\varphi(x)) = x$$

gilt (natürlich unter Berücksichtigung der jeweiligen Definitionsbereiche!), wobei φ die Umkehrfunktion (inverse Funktion) zu f bezeichnet. Durch Differentiation der linken und rechten Seite obiger Identität kann man die Ableitungsregel für das jeweilige φ ermitteln. Beispiele:

- $[\ln x]' = ?$

Anmerkung: $\exp(x) = e^x$

$$\exp(\ln x) = x, \quad \Rightarrow \quad [\exp(\ln x)]' = [x]'$$

$$\exp(\ln x)\,[\ln x]' = 1 \quad \Rightarrow \quad x\,[\ln x]' = 1$$

$$\Rightarrow [\ln x]' = \frac{1}{x}$$

- $[\arcsin x]' = ?$

Anmerkung: $\sin^2 x = (\sin x)^2$

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \Rightarrow \quad [\sin(\arcsin x)]' = [x]' \quad \Rightarrow \quad \cos(\arcsin x)[\arcsin x]' = 1$$

Unter Berücksichtigung von $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ folgt

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Die spezielle Rolle von e^x

Aus der Eigenschaft $[e^x]' = e^x$, der Identität $e^{\ln x} = x$ plus den Rechenregel für Potenzen lassen sich einige weitere Ableitungsregeln gewinnen bzw. bekannte Regeln zeigen.

1. $[a^x]' =?$ $(a \in \mathbb{R},\ a \neq e)$

$$[a^x]' = \left[\left(e^{\ln a}\right)^x\right]' = \left[e^{\ln a\, x}\right]' = e^{\ln a\, x} \ln a = a^x \ln a$$

Die spezielle Rolle von e^x

Aus der Eigenschaft $[e^x]' = e^x$, der Identität $e^{\ln x} = x$ plus den Rechenregel für Potenzen lassen sich einige weitere Ableitungsregeln gewinnen bzw. bekannte Regeln zeigen.

1. $[a^x]' = ?$ $(a \in \mathbb{R},\ a \neq e)$

$$[a^x]' = \left[\left(e^{\ln a}\right)^x\right]' = \left[e^{\ln a\, x}\right]' = e^{\ln a\, x} \ln a = a^x \ln a$$

2. $[x^a]' = ?$

$$[x^a]' = \left[\left(e^{\ln x}\right)^a\right]' = \left[e^{a \ln x}\right]' = e^{a \ln x}\, a \frac{1}{x} = a\, x^a\, \frac{1}{x} = a x^{a-1}$$

(verallg. Potenzregel)

Die spezielle Rolle von e^x

Aus der Eigenschaft $[e^x]' = e^x$, der Identität $e^{\ln x} = x$ plus den Rechenregel für Potenzen lassen sich einige weitere Ableitungsregeln gewinnen bzw. bekannte Regeln zeigen.

1. $[a^x]' =?$ $(a \in \mathbb{R},\ a \neq e)$

$$[a^x]' = \left[\left(e^{\ln a}\right)^x\right]' = \left[e^{\ln a\, x}\right]' = e^{\ln a\, x} \ln a = a^x \ln a$$

2. $[x^a]' =?$

$$[x^a]' = \left[\left(e^{\ln x}\right)^a\right]' = \left[e^{a \ln x}\right]' = e^{a \ln x}\, a \frac{1}{x} = a\, x^a\, \frac{1}{x} = a x^{a-1}$$

(verallg. Potenzregel)

3. $[x^x]'$ (just for fun ...)

$$[x^x]' = \left[\left(e^{\ln x}\right)^x\right]' = \left[e^{x \ln x}\right]' = e^{x \ln x}\, [x \ln x]' = x^x \left(1\, \ln x + x \frac{1}{x}\right) = x^x (1 + \ln x)$$

(Was ist die Definitionsmenge dieser Funktion?)

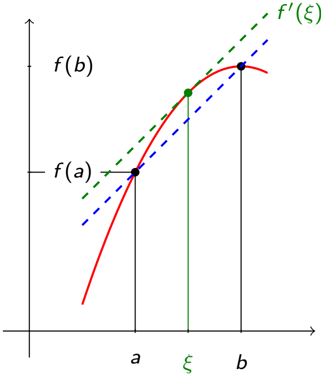
Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Von den vielen Sätzen über Eigenschaften differenzierbarer Funktionen sei hier nur der Mittelwertsatz (MWS) erwähnt (weil wir ihn später kurz brauchen werden ...)

Wenn eine Funktion $y = f(x)$ in einem abgeschlossenen Intervall [a,b], $a \leq x \leq b$, stetig ist und im Innern eine Ableitung besitzt, dann existiert zwischen a und b zumindests eine Zahl ξ, daß gilt

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

$$(a < \xi < b)$$



Achtung: Der MWS garantiert nur die Existenz mindestens eines Punktes ξ, sagt jedoch nichts darüber aus, wo diese(s) ξ (die ξ-s) zu finden ist (sind)!

Höhere Ableitungen

Wie aus den vorigen Folien klar sein sollte, erzeugt der Vorgang des Differenzierens aus einer Funktion $f(x)$ eine neue Funktion, $f'(x)$. Soferne $f'(x)$ selbst wieder differenzierbar ist, kann man natürlich nochmals differenzieren:

$$[f'(x)]' = f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$$

Wird eine Funktion n-mal differenziert, so spricht man von der n-ten Ableitung

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$$

Ein paar Anmerkungen zu höheren Ableitungen:

- Eine Ableitung kann verglichen zur Funktion selbst eine eine eingeschränkte Definitionsmenge haben. Z.B.

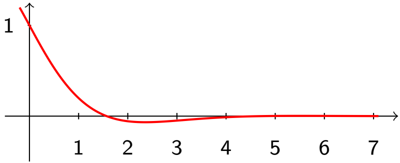
$$f(x) = \sqrt[3]{x},\ D = \mathbb{R} \qquad f'(x) = x^{-2/3},\ D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- Manche Funktionen haben unendlich viele Ableitungen, x.B. e^x, $\sin x$, $\frac{1}{1-x^2}$. Diese können gleich sein (e^x) oder sich periodisch wiederholen ($\sin x$), oder aber wirklich alle unterschiedlich sein ($\frac{1}{1-x^2}$).
- Hingegen hat ein Polynom n-ten Grades genau n von Null verschiedene Ableitungen. Z.B. $f(x) = 3x^3 - x^2 + 5x - 1$, $f'(x) = 9x^2 - 2x + 5$, $f''(x) = 18x - 2$, $f'''(x) = 18$, $f^{(n\geq 4)} = 0$.

Kurvendiskussion

Unter *Kurvendiskussion* versteht man i.a. das Bestimmen von Nullstellen, Extremstellen und Wendepunkten von Funktionen (was damit gemeint ist in Kürze). Früher war eine Kurvendiskussion unumgänglich, wenn man eine (genauen) Zeichnung einer Funktion wollte. Dies erledigt heute der Computer, aber trotzdem braucht man of mehr als ein Bild

Beispiel 1: $f(x) = e^{-x} \cos x$

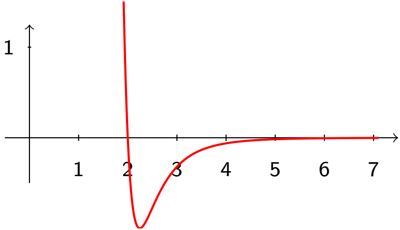


Dies ist der Prototyp einer gedämpften Schwingung. Durch den multiplikativen $\cos x$ Term gibt es unendlich viele Nullstellen, Maxima, Minima und Wendepunkte — können Sie diese aus der Skizze ablesen?

Kurvendiskussion

Unter *Kurvendiskussion* versteht man i.a. das Bestimmen von Nullstellen, Extremstellen und Wendepunkten von Funktionen (was damit gemeint ist in Kürze). Früher war eine Kurvendiskussion unumgänglich, wenn man eine (genauen) Zeichnung einer Funktion wollte. Dies erledigt heute der Computer, aber trotzdem braucht man of mehr als ein Bild

Beispiel 2: Lennard-Jones Potential $U(r) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$



Das Lennard-Jones Potential kann z.B. verwendet werden um (näherungsweise) Wechselwirkungen zwischen Edelgasatomen zu beschreiben. Der Plot wurde für $\epsilon = 1$ und $\sigma = 2$ gemacht. Könnten Sie ohne Kurvendiskussion erkennen, daß der Nulldurchgang bei σ liegt, das Minimum bei $\sqrt[6]{2}\sigma$ liegt, und die Tiefe des Minimums $-\epsilon$ beträgt?

Kurvendiskussion

Unter *Kurvendiskussion* versteht man i.a. das Bestimmen von Nullstellen, Extremstellen und Wendepunkten von Funktionen (was damit gemeint ist in Kürze). Früher war eine Kurvendiskussion unumgänglich, wenn man eine (genauen) Zeichnung einer Funktion wollte. Dies erledigt heute der Computer, aber trotzdem braucht man of mehr als ein Bild

Anmerkung: Im Folgenden wird angenommen, daß Sie Nullstellen der wichtigsten Funktionen bestimmen können. Dies wird in den Übungen speziell behandelt; Sie sollten sich aber fragen, ob Sie (alle) Nullstellen von z.B. $12x^3 - 12x^2 - 14x$, $\ln(3 - x^2)$, $(x-2)^2 \sin x$, $\cos(3x - \pi/3)$ bestimmen könnten...

Maxima und Minima einer Funktion

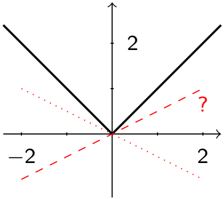
Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle a ein lokales Maximum (Minimum), wenn in einer Umgebung $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$ gilt

$$f(a) > f(x) \qquad (f(a) < f(x))$$

wobei a bzw. die x des Intervalls in der Definitionsmenge von $f(x)$ liegen müssen. Gilt die entsprechende Ungleichung für die gesamte Definitionsmenge, so spricht man vom *globalen* Maximum (Minimum).

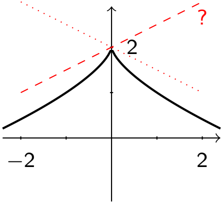
Bevor wir der Frage nachgehen, wie Differentiation beim Suchen nach lokalen Maxima/Minima helfen kann, sei angemerkt, daß Maxima/Minima durchaus an Stellen auftreten können, an denen die Ableitung der Funktion *nicht* definiert ist!

$f(x) = |x|$



Minimum bei $x = 0$

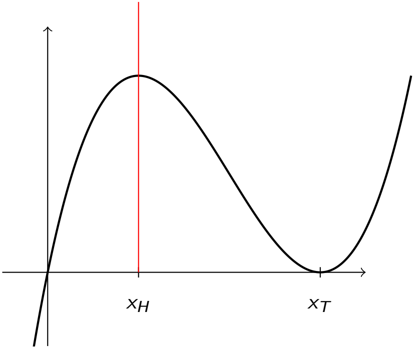
$f(x) = 2 - x^{2/3}$



Maximum bei $x = 0$

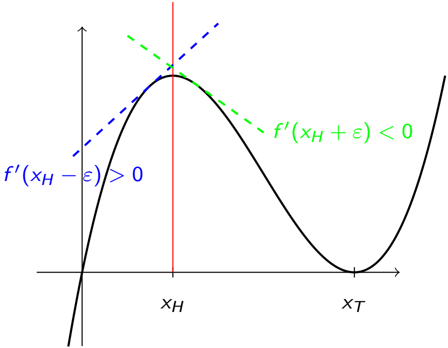
Maxima und Minima einer Funktion

Betrachten wir folgende (überall differenzierbare) Funktion, die ein Maximum bei $x = x_H$ und ein Minimum bei $x = x_T$ besitzt:



Maxima und Minima einer Funktion

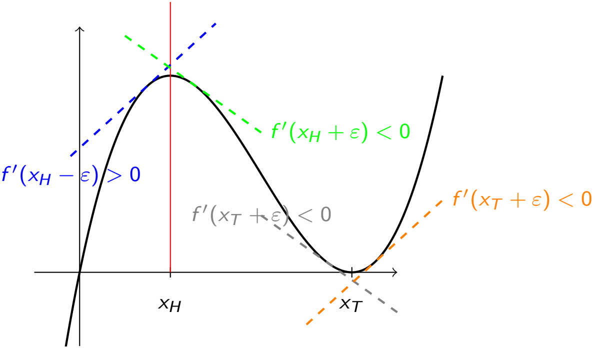
Betrachten wir folgende (überall differenzierbare) Funktion, die ein Maximum bei $x = x_H$ und ein Minimum bei $x = x_T$ besitzt:



Innerhalb einer gewissen Umgebung um x_H gilt, daß für $x < x_H$ $f(x)$ (streng) monoton wachsend, für $x > x_H$ $f(x)$ (streng) monoton fallend ist; dementsprechend ist für $x < x_H$ $f'(x) > 0$ und für $x > x_H$ $f'(x) < 0$.

Maxima und Minima einer Funktion

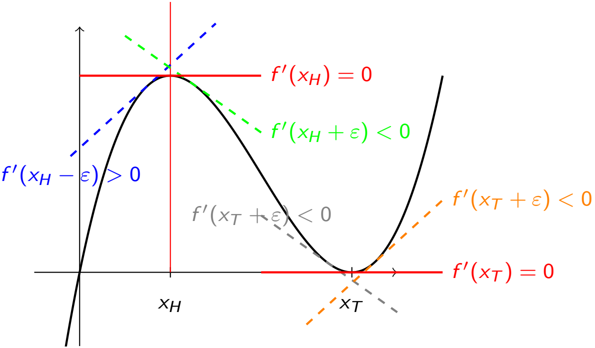
Betrachten wir folgende (überall differenzierbare) Funktion, die ein Maximum bei $x = x_H$ und ein Minimum bei $x = x_T$ besitzt:



Innerhalb einer gewissen Umgebung um x_H gilt, daß für $x < x_H$ $f(x)$ (streng) monoton wachsend, für $x > x_H$ $f(x)$ (streng) monoton fallend ist; dementsprechend ist für $x < x_H$ $f'(x) > 0$ und für $x > x_H$ $f'(x) < 0$. Sinngemäß analoges gilt für die Umgebung von x_T.

Maxima und Minima einer Funktion

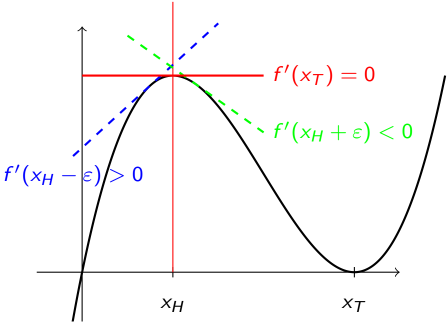
Betrachten wir folgende (überall differenzierbare) Funktion, die ein Maximum bei $x = x_H$ und ein Minimum bei $x = x_T$ besitzt:



Innerhalb einer gewissen Umgebung um x_H gilt, daß für $x < x_H$ $f(x)$ (streng) monoton wachsend, für $x > x_H$ $f(x)$ (streng) monoton fallend ist; dementsprechend ist für $x < x_H$ $f'(x) > 0$ und für $x > x_H$ $f'(x) < 0$. Sinngemäß analoges gilt für die Umgebung von x_T. Die erste Ableitung $f'(x)$ ändert also an x_H bzw. x_T ihr Vorzeichen, d.h., $f'(x_H) = f'(x_T) = 0$.

Maxima und Minima einer Funktion

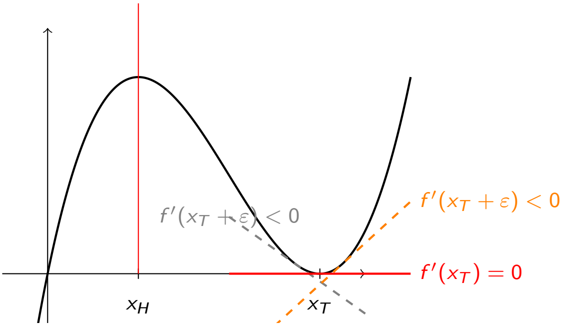
Basierend auf diesen Überlegungen, können wir schließen, daß für ein Maximum bzw. Minimum gelten muß: $f'(x) = 0$. Dies stellt sich als ein notwendiges (jedoch nicht hinreichendes) Kriterium heraus. Darüberhinaus reicht es alleine nicht zur Entscheidung aus, ob es sich an der betreffenden Stelle um ein Maximum oder Minimum handelt.
Betrachten wir daher nochmals die Skizze in der Umgebung von x_H bzw. x_T:



Wenn Sie die Abfolge $f'(x_H - \varepsilon)$, $f'(x_H)$, $f'(x_H + \varepsilon)$ betrachten, so erkennen Sie, daß $f'(x)$ in der Umgebung von x_H monoton fallend ist. Die Ableitung von $f'(x)$, d.h., $f''(x)$ ist somit in diesem Bereich kleiner als null ($f''(x) < 0$).

Maxima und Minima einer Funktion

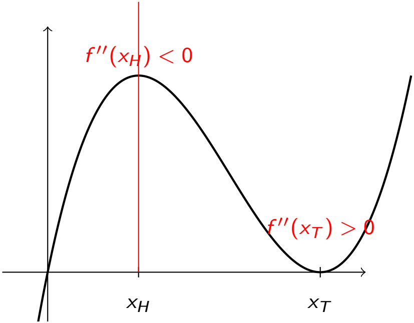
Basierend auf diesen Überlegungen, können wir schließen, daß für ein Maximum bzw. Minimum gelten muß: $f'(x) = 0$. Dies stellt sich als ein notwendiges (jedoch nicht hinreichendes) Kriterium heraus. Darüberhinaus reicht es alleine nicht zur Entscheidung aus, ob es sich an der betreffenden Stelle um ein Maximum oder Minimum handelt.
Betrachten wir daher nochmals die Skizze in der Umgebung von x_H bzw. x_T:



Analog ist $f'(x)$ in der Umgebung von $x = x_T$ monoton steigend, d.h., $f''(x) > 0$ in diesem Bereich.

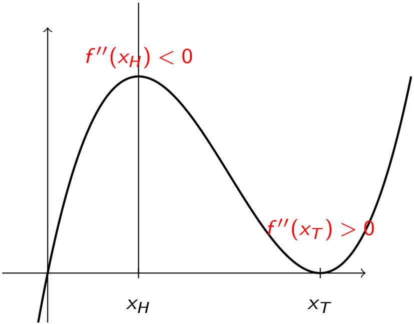
Maxima und Minima einer Funktion

Basierend auf diesen Überlegungen, können wir schließen, daß für ein Maximum bzw. Minimum gelten muß: $f'(x) = 0$. Dies stellt sich als ein notwendiges (jedoch nicht hinreichendes) Kriterium heraus. Darüberhinaus reicht es alleine nicht zur Entscheidung aus, ob es sich an der betreffenden Stelle um ein Maximum oder Minimum handelt.
Betrachten wir daher nochmals die Skizze in der Umgebung von x_H bzw. x_T:



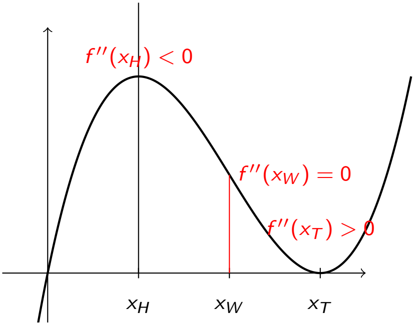
Insbesondere gilt also $f''(x_H) < 0$ und $f''(x_T) > 0$. Dies gilt ganz allgemein: Für Maxima gilt $f'(x_{max}) = 0$, $f''(x_{max}) < 0$; für Minima: $f'(x_{min}) = 0$, $f''(x_{min}) > 0$

Wendepunkte



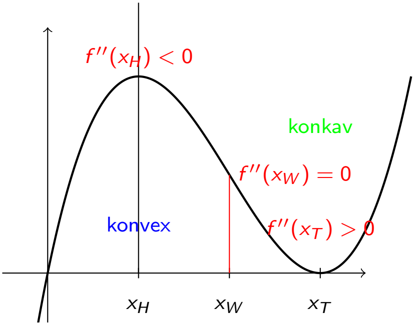
Wenn also $f''(x)$ in der Umgebung des Maximums < 0 und in der Umgebung des Minimums > 0 ist,

Wendepunkte



Wenn also $f''(x)$ in der Umgebung des Maximums < 0 und in der Umgebung des Minimums > 0 ist, so muß dazwischen ein Punkt x_W liegen, an dem $f''(x) = 0$. Derartige Punkte (soferne $f'(x_W) \neq 0!$) bezeichnet man als Wendepunkte.

Wendepunkte



Wenn also $f''(x)$ in der Umgebung des Maximums < 0 und in der Umgebung des Minimums > 0 ist, so muß dazwischen ein Punkt x_W liegen, an dem $f''(x) = 0$. Derartige Punkte (soferne $f'(x_W) \neq 0$!) bezeichnet man als Wendepunkte.

Anmerkung: Das Vorzeichen der zweiten Ableitung beschreibt das *Krümmungsverhalten* der Funktion. Bereiche mit $f''(x) > 0$ bezeichnet man als *konkav*, solche mit $f''(x) < 0$ als *konvex*.

Spezialfälle

Es kann vorkommen, daß an einer Stelle sowohl 1. als auch 2. Ableitung verschwinden, d.h.,

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0$$

(Beispiele wären $f_1(x) = x^3$ und $f_2(x) = x^4$ an der Stelle $x_0 = 0$!) Beim Punkt x_0 kann es sich um eine Extremstelle (Max./Min.) oder um einen Wendepunkt handeln. Derartige fragliche Stellen werden wie folgt untersucht:

Es ist so lange weiter zu differenzieren, bis man eine Ableitung findet, die an dieser Stelle nicht verschwindet, d.h., $f^{(n)} \neq 0$.

Ist die Ordnung n der Ableitung, die an der Stelle $x = x_0$ erstmalig nicht verschwindet, gerade, dann besitzt f(x) dort ein lokales Extremum: für einen negativen Wert der Ableitung ein Maximum ($f^{(n)} < 0$), für einen posiven Wert ein Minimum ($f^{(n)} > 0$).

Ist die Ordnung n dieser Ableitung ungerade, dann besitzt die Funktion an diesem Punkt einen Wendepunkt [Bartsch S. 147].

Bitte verwenden Sie dieses Kriterium um zu überprüfen, daß $f_1(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 0$ einen Wendepunkt und $f_2(x) = x^4$ an der Stelle $x_0 = 0$ ein Minimum hat.

Arbeitsprogramm Kurvendiskussion

Wenn im Rahmen dieser Vorlesung bzw. der begleitenden Übungen eine (vollständige) Kurvendiskussion verlangt ist, so sind folgende Punkte zu behandeln:

- Definitionsmenge D, Verhalten von $f(x)$ für $\text{x} \to \pm\infty$, Verhalten der Funktion in der Nähe von Definitionslücken (*Polstellen*)
- Nullstelle(n) $f x_N$, $f(x_N) = 0$
- Extremstelle(n) x_E, $f'(x_E) = 0$, Bestimmung mittels 2. Ableitung, ob es sich um ein Maximum ($f''(x_E) < 0$) oder ein Minimum ($f''(x_E) > 0$) handelt.
- Wendepunkt(e) x_W, $f''(x_W) = 0$
- Die Werte der Funktion für die Extremstellen x_E bzw. die Wendestellen x_W sind anzugeben.
- Gibt es Punkte für die $f'(x_i) = f''(x_i) = 0$, so ist wie eben besprochen zu entscheiden, ob es sich um Wendepunkte, Maxima oder Minima handelt.

Zum Abschluß zwei durchgerechnete Beispiele: Das erste ist so einfach wie möglich gehalten und illustriert die besprochenen Punkte. Das zweite ist relative schwierig und dient der Vertiefung. Zur Übung empfehle ich unbedingt eine vollständige Kurvendiskussion von $f(x) = e^{-x} \sin x$!

Beispiel I

Vollständige Kurvendiskussion von $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

1.) $D = \mathbb{R}$; Für Verhalten $x \longrightarrow \pm\infty$ genügt es zu wissen, wie sich die höchste Potenz, x^3, verhält. Daraus folgt aber sofort $f(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow -\infty$ und $f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \longrightarrow +\infty$

2.) Nullstellen: $x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x-3)^2$, somit $x_{N,1} = 0$, $x_{N,2} = 3$. (Wenn Sie die Faktorisierung im 2. Schritt nicht "sehen", so lösen Sie die quadratische Gleichung!)

3.) Bevor wir uns auf die Suche nach Extrem- und Wendestellen machen, berechnen wir die benötigten Ableitungen:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \qquad f''(x) = 6x - 12$$

4.) Extremstellen: f'(x)=0

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \qquad x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad {}_2x_1 = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \qquad x_{E,1} = 1,\ x_{E,2} = 3$$

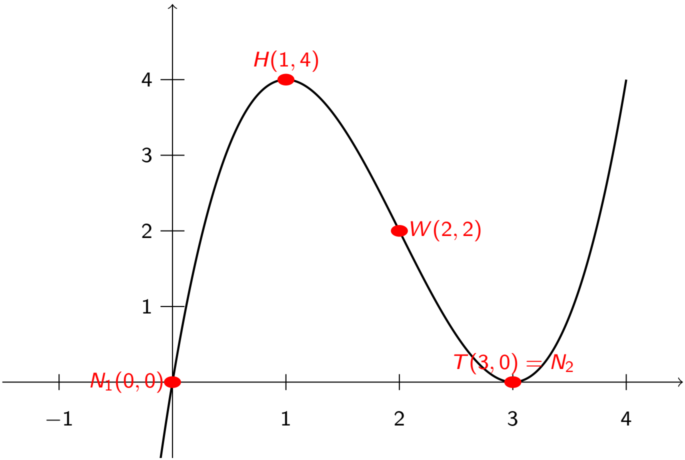
und

$$\begin{aligned} f''(x_{E,1}) = f''(1) = &\ \ 6 - 12 < 0 \quad \Rightarrow \text{ Maximum bei } H(1,4) \\ f''(x_{E,2}) = f''(3) = &\ 18 - 12 > 0 \quad \Rightarrow \text{ Minimum bei } T(3,0) \end{aligned}$$

5.) Wendepunkt: f"(x)=0

$$6x - 12 = 0 \qquad x = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt in} W(2,2)$$

Beispiel I — Graph der Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$



Beispiel II

Vollständige Kurvendiskussion von
$f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3} = \sqrt[3]{x^2(6-x)} = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$

1.) Die Definitionsmenge ist $\mathbb{R}$; die 3. Wurzel ist auch für negative Argumente wohldefiniert! Zum Verständnis des Verhaltens der Funktion für $x \to \pm\infty$ betrachten wir die Funktion wie oben ganz rechts angeschrieben: Unter der Wurzel steht ein Polynom 3. Grades, d.h., für $x \to \pm\infty$ ist nur der Term $-x^3$ (höchste Potenz) relevant. Dieser steht unter einer 3. Wurzel, d.h., $\sqrt[3]{-x^3} = -x$. M.a.W., für $x \to \pm\infty$ verhält sich die Funktion wie $-x$. ($f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$).

2.) Die Nullstellen $x_{N,1} = 0$ und $x_{N,2} = 6$ lassen sich unmittelbar aus der Angabe ablesen.

3.) Berechnen der Ableitungen: *(Bitte zuerst einmal selbst versuchen!)*

Beispiel II

Vollständige Kurvendiskussion von
$f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3} = \sqrt[3]{x^2(6-x)} = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$

1.) Die Definitionsmenge ist $\mathbb{R}$; die 3. Wurzel ist auch für negative Argumente wohldefiniert! Zum Verständnis des Verhaltens der Funktion für $x \to \pm\infty$ betrachten wir die Funktion wie oben ganz rechts angeschrieben: Unter der Wurzel steht ein Polynom 3. Grades, d.h., für $x \to \pm\infty$ ist nur der Term $-x^3$ (höchste Potenz) relevant. Dieser steht unter einer 3. Wurzel, d.h., $\sqrt[3]{-x^3} = -x$. M.a.W., für $x \to \pm\infty$ verhält sich die Funktion wie $-x$. ($f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$).

2.) Die Nullstellen $x_{N,1} = 0$ und $x_{N,2} = 6$ lassen sich unmittelbar aus der Angabe ablesen.

3.) Berechnen der Ableitungen: *(Bitte zuerst einmal selbst versuchen!)*

$$f'(x) = \frac{1}{3}(6x^2 - x^3)^{-2/3}(12x - 3x^2) = \frac{x(4-x)}{(x^2(6-x))^{2/3}} = \frac{\cancel{x}(4-x)}{\cancel{x}(x(6-x)^2)^{1/3}} =$$

$$= \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} = (4-x)x^{-1/3}(6-x)^{-2/3}$$

$$f''(x) = (-1)x^{-\frac{1}{3}}(6-x)^{-\frac{2}{3}} + (4-x)(-\frac{1}{3})x^{-4/3}(6-x)^{-\frac{2}{3}} + (4-x)x^{-\frac{1}{3}}(-\frac{2}{3})(6-x)^{-\frac{5}{3}}(-1) =$$

$$= -\frac{3\,x\,(6-x) + (4-x)(6-x) - 2(4-x)x}{3\,x^{1/3}\,(6-x)^{5/3}} = \ldots = \frac{-8}{x^{1/3}\,(6-x)^{5/3}}$$

Beispiel II

Nachdem wir uns von der Anstrengung erholt haben, halten wir fest, daß die beiden Ableitungen bei $x = 0$ und $x = 6$ Definitionslücken haben. Die Umgebung dieser beiden Punkte gehört gesondert untersucht!

4.) (a) Nullsetzen der 1. Ableitung führt sofort auf $x_E = 4$.
$f''(4) = -8/[4^{1/3}(6-4)^{5/3}] < 0$ (was immer der genaue Wert des Nenners ist, er ist > 0, und der Zähler ist -8). Somit gibt es ein Maximum $H(4, 2^{5/3})$.

(b) Wir untersuchen jetzt das Vorzeichen der 1. Ableitung für $0-\epsilon$, $0+\epsilon$, $6-\epsilon$, $6+\epsilon$ (ϵ ist eine (sehr) kleine reelle Zahl > 0). Positive Faktoren sind in grün, negative Faktoren in blau gefärbt.

$$f'(-\epsilon) = \frac{4+\epsilon}{(-\epsilon)^{1/3}(6+\epsilon)^{2/3}} < 0$$

$$f'(+\epsilon) = \frac{4-\epsilon}{(+\epsilon)^{1/3}(6-\epsilon)^{2/3}} > 0$$

Hinweis: ϵ ist jedenfalls viel kleiner als 4 oder 6!
Wie Sie sehen wechselt die 1. Ableitung um $x = 0$ das Vorzeichen von negativ auf positiv. Somit handelt es sich bei $x_E = 0$ aber um ein Extremum, genauer um das Minimum $T(0, 0)$.

$$f'(6-\epsilon) = \frac{4-6+\epsilon}{(6-\epsilon)^{1/3}(6-6+\epsilon)^{2/3}} = \frac{-2+\epsilon}{(6-\epsilon)^{1/3}(+\epsilon^2)^{1/3}} < 0$$

$$f'(6+\epsilon) = \frac{4-6-\epsilon}{(6+\epsilon)^{1/3}(6-6-\epsilon)^{2/3}} = \frac{-2-\epsilon}{(6+\epsilon)^{1/3}((-\epsilon)^2)^{1/3}} < 0$$

Das Vorzeichen ändert sich nicht, bei $x = 6$ liegt kein Extremum vor.

Beispiel II

5.) Es gibt keine Nullstelle für $f''(x)$. Allerdings haben wir noch einen problematischen Punkt, $x = 6$, "offen". Wir wissen bereits, daß es dort kein Extremum gibt. Jetzt prüfen wir, ob sich zwischen $6 - \epsilon$ und $6 + \epsilon$ das Vorzeichen von $f''(x)$ ändert:

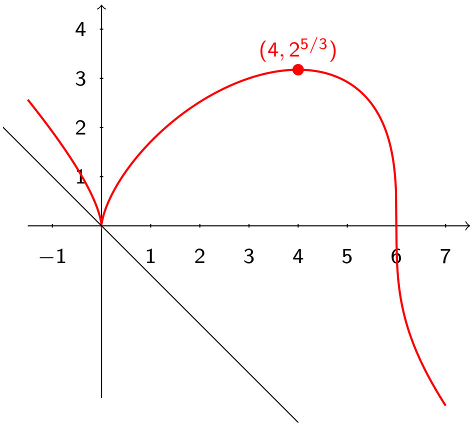
$$f''(6-\epsilon) = \frac{-8}{(6-\epsilon)^{1/3}(6-6+\epsilon)^{5/3}} < 0$$

$$f''(6+\epsilon) = \frac{-8}{(6+\epsilon)^{1/3}(6-6-\epsilon)^{5/3}} > 0$$

Tatsächlich ändert die 2. Ableitung um $x = 6$ ihr Vorzeichen, somit ist der Punkt $W(6,0)$ als Wendepunkt identifiziert.

Beispiel II

Zum Abschluß noch der Graph unseres zweiten Beispiels ...



Neben der Funktion (in rot) ist auch das asymptotische Verhalten $f(x) \propto -x$ als dünne, schwarze Gerade eingezeichnet.

Anmerkung: Mathematica z.B. weigert sich diese Funktion zu plotten, da es Wurzeln $x^{n/m}$ als $e^{(m/n)\ln x}$ berechnet und $\ln x$ für $x \leq 0$ nicht definiert ist. Sollten Sie in ein solches Problem laufen, dann plotten Sie stattdessen $(x^2)^{1/3} \frac{6-x}{|6-x|} \, |6-x|^{1/3}$ — *nobody is perfect ...*

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.
This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.
We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "**Document**", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "**you**". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.
A "**Modified Version**" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.
A "**Secondary Section**" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.
The "**Invariant Sections**" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.
The "**Cover Texts**" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A “**Transparent**” copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not “Transparent” is called “**Opaque**”.
Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.
The “**Title Page**” means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, “Title Page” means the text near the most prominent appearance of the work’s title, preceding the beginning of the body of the text.
A section “**Entitled XYZ**” means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as “**Acknowledgements**”, “**Dedications**”, “**Endorsements**”, or “**History**”.) To “**Preserve the Title**” of such a section when you modify the Document means that it remains a section “Entitled XYZ” according to this definition.
The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.
You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document’s license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.
If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.
It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.

C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.

D. Preserve all the copyright notices of the Document.

E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.

F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.

G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

H. Include an unaltered copy of this License.

I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.

J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.

K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.

L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.

M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.

N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.

O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties–for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4.

Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

> *Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".*

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with ... Texts." line with this:

> *with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.*

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.