Differentialgleichungen

Stefan Boresch

Department of Computational Biological Chemistry
Faculty of Chemistry
University of Vienna

December 16, 2011

Was ist eine Differentialgleichung

Wir sind es gewohnt Gleichung nach einer Veränderlichen zu lösen. Z.B.

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

hat die Lösung $x = 1$. Allgemein bedeutet

$$f(x) = 0,$$

daß ich die Werte von x suche, die eingesetzt in die (bekannte) Funktion $f(x)$ Null ergeben.

Bei Differentialgleichungen (DGL) hingegen suche ich nicht Werte einer Veränderlichen sondern eine Funktion, die bestimmte Bedingungen erfüllt. Ein Beispiel wäre

$$f(x) = f'(x) \qquad \text{(A)}$$

In Worten: Welche Funktion ist gleich ihrer Ableitung — richtig $f(x) = e^x$. Genauer gesagt erfüllt jedes multiplikatives Vielfache von e^x die obige Differntialgleichung, d.h., die allgemeinste Lösung ist $f(x) = Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$.

Allgemein kann man eine DGL (in einer Variablen) auch als

$$F\big(f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)\big) = 0$$

schreiben (n ist endlich, kann aber beliebig groß werden!), d.h., eine Funktion F, die eine unbekannte Funktion in Beziehung zu n ihrer Ableitungen setzt. Unser Beispiel (A) auf diese Form gebracht würde lauten:

$$f(x) - f'(x) = 0$$

Ein einfaches Beispiel

Bevor wir uns als Einführung ein einfaches Beispiel ansehen, ändern wir die Notation. Bei Differentialgleichungen (von Funktionen einer Veränderlichen) schreibt man meist $y(x)$ anstatt $f(x)$, und normalerweise wird auch das x weggelassen. Aus unserem Beispiel der vorigen Seite

$$f(x) = f'(x)$$

wird also

$$y = y'$$

Jetzt aber zum versprochenen (noch einfacherem Beispiel):

$$y' = x^2$$

Sie kennen die Ableitung y', gesucht ist die Funktion. Es ist also linke und rechte Seite zu integrieren, d.h.,

$$\int y' \, dy = \int x^2 \, dx$$

und somit

$$y = \frac{x^3}{3}$$

Ein einfaches Beispiel

Bevor wir uns als Einführung ein einfaches Beispiel ansehen, ändern wir die Notation. Bei Differentialgleichungen (von Funktionen einer Veränderlichen) schreibt man meist $y(x)$ anstatt $f(x)$, und normalerweise wird auch das x weggelassen. Aus unserem Beispiel der vorigen Seite

$$f(x) = f'(x)$$

wird also

$$y = y'$$

Jetzt aber zum versprochenen (noch einfacherem Beispiel):

$$y' = x^2$$

Sie kennen die Ableitung y', gesucht ist die Funktion. Es ist also linke und rechte Seite zu integrieren, d.h.,

$$\int y'\,dy = \int x^2\,dx$$

und somit

$$y + C_1 = \frac{x^3}{3} + C_2$$

ABER ACHTUNG! Wir haben die Integrationskonstanten vergessen!

Ein einfaches Beispiel

Bevor wir uns als Einführung ein einfaches Beispiel ansehen, ändern wir die Notation. Bei Differentialgleichungen (von Funktionen einer Veränderlichen) schreibt man meist $y(x)$ anstatt $f(x)$, und normalerweise wird auch das x weggelassen. Aus unserem Beispiel der vorigen Seite

$$f(x) = f'(x)$$

wird also

$$y = y'$$

Jetzt aber zum versprochenen (noch einfacherem Beispiel):

$$y' = x^2$$

Sie kennen die Ableitung y', gesucht ist die Funktion. Es ist also linke und rechte Seite zu integrieren, d.h.,

$$\int y' \, dy = \int x^2 \, dx$$

und somit

$$y = \frac{x^3}{3} + C$$

ABER ACHTUNG! Wir haben die Integrationskonstanten vergessen! Zwei Integrationskonstanten sind aber übertrieben, da man die beiden ja immer zu $C = C_2 - C_1$ zusammenfassen.

Ein einfaches Beispiel

Bevor wir uns als Einführung ein einfaches Beispiel ansehen, ändern wir die Notation. Bei Differentialgleichungen (von Funktionen einer Veränderlichen) schreibt man meist $y(x)$ anstatt $f(x)$, und normalerweise wird auch das x weggelassen. Aus unserem Beispiel der vorigen Seite

$$f(x) = f'(x)$$

wird also

$$y = y'$$

Jetzt aber zum versprochenen (noch einfacherem Beispiel):

$$y' = x^2$$

Sie kennen die Ableitung y', gesucht ist die Funktion. Es ist also linke und rechte Seite zu integrieren, d.h.,

$$\int y' \, dy = \int x^2 \, dx$$

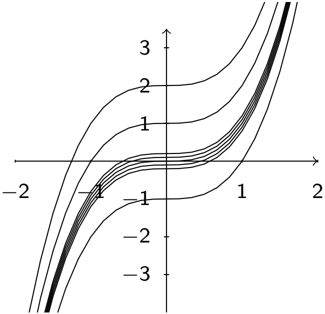
und somit

$$y = \frac{x^3}{3} + C$$

ABER ACHTUNG! Wir haben die Integrationskonstanten vergessen! Zwei Integrationskonstanten sind aber übertrieben, da man die beiden ja immer zu $C = C_2 - C_1$ zusammenfassen. Löst man DGLs, darf man aber die Integrationskonstante nicht vergessen!

Ein einfaches Beispiel — Fortsetzung

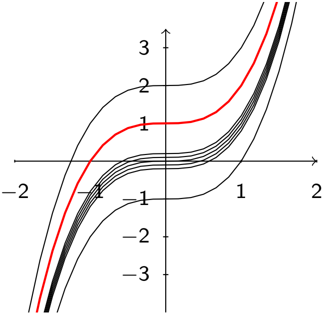
Selbst diese einfachste aller Differentialgleichungen hat also nicht eine, sondern unendliche viele Lösungen, $y = \frac{x^3}{3} + C$. Ein paar davon ($C = -1, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 1, 2$) sind hier gezeichnet:



Man bezeichnet $y = \frac{x^3}{3} + C$ als *allgemeine* Lösung der DGL $y' = x^2$. Die unendlich vielen Lösungen können durch eine s.g. *Anfangsbedingung* auf eine Funktion eingeengt werden.

Ein einfaches Beispiel — Fortsetzung

Selbst diese einfachste aller Differentialgleichungen hat also nicht eine, sondern unendliche viele Lösungen, $y = \frac{x^3}{3} + C$. Ein paar davon ($C = -1, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 1, 2$) sind hier gezeichnet:



Man bezeichnet $y = \frac{x^3}{3} + C$ als *allgemeine* Lösung der DGL $y' = x^2$. Die unendlich vielen Lösungen können durch eine s.g. *Anfangsbedingung* auf eine Funktion eingeengt werden.
Die Anfangsbedingung (AB) $y(x = 0) = 1$ bedingt z.B., daß die Integrationskonstante den Wert $C = 1$ haben muß. Nur $y = \frac{x^3}{3} + 1$ erfüllt diese spezielle AB.

Zur "Artenlehre" von DGLs

Es ist wahrscheinlich wenig überraschend, daß sich die wenigsten DGLs so einfach wie unser Einführungsbeispiel lösen lassen. Des weiteren gibt es kein allgemeines Lösungsverfahren. Im Gegenteil, je nach den Eigenschaften der DGL muß man oft ganz unterschiedliche Verfahren / Tricks anwenden. Steht man vor der Aufgabe eine DGL zu lösen, muß man sie als erste klassifizieren, um in entsprechenden Formelsammlungen / Monographien nach Lösungsverfahren suchen zu können. Daher ein paar Kriterien zur Klassifizierung von DGLs:

Zur “Artenlehre” von DGLs

Es ist wahrscheinlich wenig überraschend, daß sich die wenigsten DGLs so einfach wie unser Einführungsbeispiel lösen lassen. Des weiteren gibt es kein allgemeines Lösungsverfahren. Im Gegenteil, je nach den Eigenschaften der DGL muß man oft ganz unterschiedliche Verfahren / Tricks anwenden. Steht man vor der Aufgabe eine DGL zu lösen, muß man sie als erste klassifizieren, um in entsprechenden Formelsammlungen / Monographien nach Lösungsverfahren suchen zu können. Daher ein paar Kriterien zur Klassifizierung von DGLs:

I. Gewöhnlich oder partiell? Ist die gesuchte Funktion von nur einer Veränderlichen abhängig, dann spricht man von einer *gewöhnlichen* DGL, ansonsten von einer *partiellen* DGL.

$$y = y(x) \qquad \text{gewöhnliche DGL}$$

$$y = y(x_1, x_2, \ldots) \qquad \text{partielle DGL}$$

Zur "Artenlehre" von DGLs

Es ist wahrscheinlich wenig überraschend, daß sich die wenigsten DGLs so einfach wie unser Einführungsbeispiel lösen lassen. Des weiteren gibt es kein allgemeines Lösungsverfahren. Im Gegenteil, je nach den Eigenschaften der DGL muß man oft ganz unterschiedliche Verfahren / Tricks anwenden. Steht man vor der Aufgabe eine DGL zu lösen, muß man sie als erste klassifizieren, um in entsprechenden Formelsammlungen / Monographien nach Lösungsverfahren suchen zu können. Daher ein paar Kriterien zur Klassifizierung von DGLs:

I. Gewöhnlich oder partiell? Ist die gesuchte Funktion von nur einer Veränderlichen abhängig, dann spricht man von einer *gewöhnlichen* DGL, ansonsten von einer *partiellen* DGL.

$$y = y(x) \qquad \text{gewöhnliche DGL}$$

$$y = y(x_1, x_2, \ldots) \qquad \text{partielle DGL}$$

II. Ordnung der DGL: Die höchste auftretende Ableitung bestimmt die *Ordnung* der DGL:

$$y''(x) - 5y(x) = 0 \qquad \text{2. Ordnung}$$

$$y'''''(x) - sin(xy'(x)) + e^x = 0 \qquad \text{5. Ordnung}$$

$$y(x)^2(1 + (y'(x))^2) - 1 = 0 \qquad \text{1. Ordnung}$$

Zur "Artenlehre" von DGLs

III. Linear oder nichtlinear: In linearen DGL treten *keine* Produkte von $y(x)$ oder seinen Ableitungen mit sich selbst (oder miteinander) auf, und $y(x)$ bzw. seine Ableitungen sind nicht das Argument einer anderen Funktion:

$y'' - 5y = 0$	linear
$\sqrt{\frac{1-a^x}{\sin(x^2)}}\, y' - \tan(x^{-1})\, y - e^{\cos x} = 0$	linear
$y^2(1 + (y')^2) - 1 = 0$	nichtlinear
$\sqrt{y'} - x^2 = 0$	nichtlinear

Zur “Artenlehre” von DGLs

III. Linear oder nichtlinear: In linearen DGL treten *keine* Produkte von $y(x)$ oder seinen Ableitungen mit sich selbst (oder miteinander) auf, und $y(x)$ bzw. seine Ableitungen sind nicht das Argument einer anderen Funktion:

$$y'' - 5y = 0 \qquad \text{linear}$$

$$\sqrt{\frac{1-a^x}{\sin(x^2)}}\, y' - \tan(x^{-1})\, y - e^{\cos x} = 0 \qquad \text{linear}$$

$$y^2(1 + (y')^2) - 1 = 0 \qquad \text{nichtlinear}$$

$$\sqrt{y'} - x^2 = 0 \qquad \text{nichtlinear}$$

- Im Rahmen dieser LVA beschäftigen wir uns nur mit gewöhnlichen DGLs.
- Nichtlineare DGL sind fast immer *viel* schwerer lösbar als lineare DGLs.
- DGLs 1. Ordnung sind tendenziell leichter zu lösen als DGLs 2. und höherer Ordnung. (Die Chance nichtlineare Gleichungen lösen zu können ist bei DGLs 1. Ordnung höher; für DGLs 1. Ordnung gibt es mit Picards Iterationsmethode (Methode der sukzessiven Approximationen) eine generischen Ansatz, der es (im Prinzip) erlaubt praktische beliebige DGLs zu lösen).
- Es sei jedoch an dieser Stelle angemerkt, daß viele DGLs nur numerisch gelöst werden können . . .

DGL 1. Ordnung

Wegen der Unterschiede zwischen DGLs 1. und höherer Ordnung besprechen wir zuerst DGLs 1. Ordnung. Insbesondere werden wir Lösungsverfahren von zwei Typen von DGLs 1. Ordnung studieren:

- Separierbare DGLs
- Lineare DGLs 1. Ordnung

Separierbare DGLs

I. Versuchen wir eine leichte Verallgemeinerung unseres ersten Beispiels, $y - y' = 0$, zu lösen, ohne auf "Erraten" der Lösung zurückzugreifen:

$$y - 5y' = 0$$

Wir schreiben die Gleichung um, wobei der Schlüssel die Schreibweise $y' = \frac{dy}{dx}$ ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}y$$

Ähnlich wie bei Substitution bei der Integration, behanden wir den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ als Bruch, und sortieren alle Terme, die y enthalten auf die eine, die die x enthalten auf die ander Seite. In unserem Beispiel ergibt das

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{5}dx$$

Jetzt integrieren wir linke und rechte Seite

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{5}dx$$

und erhalten

$$\ln y = \frac{1}{5}x + \tilde{C}$$

Integrationskonstante nicht vergessen! Es reicht allerdings, sie wie gezeigt auf einer Seite zusammenzufassen.

Separierbare DGLs

Um auf eine Lösung der Form $y =$ zu kommen wenden wir die Exponentialfunktion auf beiden Seiten an:

$$e^{\ln y} = e^{\frac{1}{5}x + \tilde{C}} \quad \Rightarrow$$

$$y = e^{\tilde{C}} e^{\frac{1}{5}x} = Ce^{x/5}$$

wobei im letzten Schritt $e^{\tilde{C}}$ zur neuen Konstanten C zusammengefasst wurde.

Separierbare DGLs

Um auf eine Lösung der Form $y =$ zu kommen wenden wir die Exponentialfunktion auf beiden Seiten an:

$$e^{\ln y} = e^{\frac{1}{5}x+\tilde{C}} \quad \Rightarrow$$

$$y = e^{\tilde{C}} e^{\frac{1}{5}x} = Ce^{x/5}$$

wobei im letzten Schritt $e^{\tilde{C}}$ zur neuen Konstanten C zusammengefasst wurde.

Kinetik 1. Ordnung: Die Geschwindigkeit mancher chemischer Reaktionen gehorcht der Beziehung $\frac{dc}{dt} = -k\,c(t)$ (c ist die Konzentration des Edukts zur Zeit t). Daraus bekommt man aber doch sofort

$$\begin{aligned} \frac{dc}{c} &= -k\,dt \\ \int \frac{dc}{c} &= -k \int dt \\ \ln c &= -kt + \tilde{D} \\ c &= De^{-kt} \end{aligned}$$

Als Anfangsbedingung hat man typischerweise die Konzentration des Edukts zum Zeitpunkt $t = 0$ (Zeitpunkt, zu dem die Reaktion gestartet wird), $c(t = 0) = c_0$. Setzt man die allgemeine Lösung $c(t) = De^{-kt}$ in diese AB ein, d.h., $c(t = 0) = c_0 = De^{-k\,0} = D$, so erhält man $D = c_0$ und somit die bekannte spezielle Lösung:

$$c(t) = c_0\, e^{-kt}$$

Die Konzentration des Edukts nimmt exponentiell mit der Zeit ab; k ist eine für die Reaktion (und Temperatur) spezifische Konstante.

Separierbare DGLs, “Typ II”

Wir haben eben gesehen, wie DGLs der Form

$$y' = \alpha y$$

gelöst werden können. Die gleiche Technik funktioniert auch für DGLs der Form

$$y' = {\color{red}h(x)}y$$

Beispiel:

$$y' = xy$$

Wir trennen wieder die Variablen:

$$\frac{dy}{y} = x\,dx$$

Linke und rechte Seite werden nun integriert:

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$$

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + \tilde{C}$$

bzw.

$$y = C\,e^{x^2/2}$$

Separierbare DGLs, “Typ II”

So weit, so (halbwegs) einfach. Ein Stolperstein bei Beispielen dieser Art sind Fehler beim Umgehen mit Exponentialfunktionen und Logarithmus. Versuchen Sie zunächst folgendes Beispiel selbst durchzurechnen, bevor Sie auf die Lösung schauen:

$$y' = -\frac{1}{2x}\, y$$

Bitte selbst probieren!

Separierbare DGLs, "Typ II"

So weit, so (halbwegs) einfach. Ein Stolperstein bei Beispielen dieser Art sind Fehler beim Umgehen mit Exponentialfunktionen und Logarithmus. Versuchen Sie zunächst folgendes Beispiel selbst durchzurechnen, bevor Sie auf die Lösung schauen:

$$y' = -\frac{1}{2x}\, y$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{2x} \\
\int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{dx}{2x} \\
\ln y &= -\frac{1}{2}\ln x + \tilde{C} \\
y &= \frac{C}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Sollten Sie als Lösung auf z.B. $-\frac{1}{2}x$ (oder ähnliches) gekommen sein, dann setzen Sie meine und Ihre Lösung in die DGL ein und machen die Probe.

Überlegen Sie bitte, warum Ihr Ergebnis falsch ist und wiederholen Sie ggf. die Rechenregeln für e^x und $\ln x$! (Wir werden derartige Rechnungen in Kürze als Routineschritte brauchen; ein Fehler hier kann Sie leicht ein ganzes Prüfungsbeispiel kosten!!)

Separierbare DGL, "Typ III"

Die von mir salopp als "Typ II" bezeichneten separierbaren DGLs $y' = h(x)y$ werden sich beim Lösen von linearen DGLs als wichtiger Zwischenschritt erweisen. Der Vollständigkeit halber machen wir unser Problem noch schwieriger — dieser "Typ III" ist in der Praxis nicht sehr wichtig, aber insofern interessant, da es sich um die einzigen nichtlinearen DGLs handelt, die leicht lösbar sind . . . :

$$y' = h(x)\color{red}{g(y)}$$

Also z.B.

$$y' = -\frac{\sin x}{y}$$

$$\begin{aligned} y\,dy &= -\sin x\,dx \\ \int y\,dy &= -\int \sin x\,dx \\ \frac{y^2}{2} &= \cos x + \tilde{C} \\ y^2 &= 2\cos x + C \qquad (C = 2\tilde{C}) \end{aligned}$$

$$y = \pm\sqrt{2\cos x + C}$$

Anmerkungen: Bei derartigen Beispielen ist eine Auflösung in der Form $y = f(x)$ (wie im obigen Bsp.) oft nicht möglich. Im konkreten Bsp. gibt es 2 Funktionszweige (pos. und neg. Wurzel)! Eine AB, z.B., $y(0) = 2$, führt in diesem Fall nicht nur auf die Spezifizierung von $C = 2$, sondern wählt auch einen der zwei Zweige aus (nur positive Wurzel erfüllt AB!)

Lineare DGLs 1. Ordnung

Lineare DGLs 1. Ordnung haben die allgemeine Form

$$y' + a(x)\,y = \begin{cases} 0 & \text{homogen} \\ h(x) & \text{inhomogen} \end{cases}$$

$a(x)$ ist eine beliebige Funktion von x. Ist die rechte Seite gleich Null, so spricht man von einer *homogenen* Gleichung, steht auf der rechten Seite $h(x) \neq 0$, so handelt es sich um eine inhomogene Gleichung. Derartige Gleichungen sind prinzipiell immer lösbar — selbst wenn man in der Praxis rasch an den auftretenden Integralen scheitern kann.

Betrachten wir zunächst kurz den homogenen Fall

$$y' + a(x)y = 0$$

Bringt man $a(x)\,y$ auf die rechte Seite,

$$y' = -a(x)\,y$$

so sieht man sofort, daß es sich um eine separierbare Differentialgleichung ("Typ II") handelt. Somit ist der homogene Fall "erledigt". Wichtig ist er trotzdem, denn wir werden in Kürze sehen, daß die Lösung der homogenen Gleichung selbst dann nötig ist, wenn die eigentlich zu lösende Gleichung inhomogen ist!

Inhomogene lineare DGLs 1. Ordnung

Wirklich Neues bringt also nur die inhomogene Gleichung, die man *nicht* separieren kann. Bevor uns mit dem konkreten Lösen dieser Aufgabe beschäftigen wollen wir kurz über die Natur der Lösung Gedanken machen. Wir nehmen an, daß wir "irgendwie" zwei Lösungen y_1 und y_2 von

$$y' + a(x)\,y = h(x) \qquad \text{(A)}$$

kennen. Es gilt also

$$\begin{aligned} y_1' + a(x)\,y_1 &= h(x) \qquad \text{(I)} \\ y_2' + a(x)\,y_2 &= h(x) \qquad \text{(II)} \end{aligned}$$

Subtrahiert man z.B. (II) von (I) erhält man

$$y_1' - y_2' + a(x)(y_1 - y_2) = 0$$

$$(y_1 - y_2)' + a(x)(y_1 - y_2) = 0$$

bzw. mit $y_1 - y_2 = y_\Delta$

$$y_\Delta' + a(x)\,y_\Delta = 0$$

Dieses Ergebnis besagt aber, daß die Differenz zweier Lösungen der eigentlich zu lösenden inhomogenen Gleichung (A) die homogene Gleichung

$$y' + a(x)\,y = 0 \qquad \text{(B)}$$

löst. Eine derartige homogene Gleichung (B), die man aus einer inhomogenen Gleichung (A) durch Weglassen von $h(x)$ (des s.g. *Störterms*) erhält, bezeichnet man als die zu (A) *zugeordnete* homogene Gleichung.

Inhomogene lineare DGLs 1. Ordnung

Aus der Definition von $y_\Delta = y_1 - y_2$ erhält man aber jetzt z.B.

$$y_1 = y_\Delta + y_2$$

Dies besagt aber Folgendes. Kenne ich *eine* Lösung der ursprünglichen inhomogenen Gleichung (A), z.B., y_2, so kann ich eine weitere Lösung (z.B. y_1) von (A) finden, indem ich zur ersten Lösung die Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung (B) (d.h. y_Δ) hinzuaddiere. Somit erhalte ich alle Lösungen von (A), wenn ich die zugehörige homogenen Gleichung (B) löse (das ist leicht, es handelt sich um eine separierbare Gleichung), und zusätzlich "irgendwie" eine s.g. *partikuläre* Lösung der vollständigen (inhomogenen) Gleichung finde.

Die allgemeine Lösung y_H der zugeordneten homogenen Gleichung (B) enthält eine Integrationskonstante, besteht also aus einer Familie von unendlich vielen Funktionen. Indem ich also zu y_H *eine* partikuläre Lösung y_P hinzuaddiere, gewinne ich eine Familie von unendlich vielen Funktionen, die alle die vollständige inhomogene Gleichung (A) lösen. Die allgemeine Lösung einer inhomogenen, linearen DGL 1. Ordnung hat also die Form

$$y = y_H + y_P = C\bar{y} + y_P$$

Dabei steckt wie rechts angedeutet die Integrationskonstante in y_H.

Variation der Konstanten

Wie findet man nun y_P (die partikuläre Lösung): Dies ist durch ein Verfahren, daß sich *Variation der Konstanten* nennt, immer möglich. Zu lösen sei

$$y' + a(x)y = h(x)$$

Wir gehen davon aus, daß wir bereits die homogene Lösung y_H kennen, und schreiben $y_H = C\bar{y}$, um die Integrationskonstante in y_H kenntlich zu machen. Für y_H gilt

$$\bar{y}' + a(x)\bar{y} = 0$$

Um eine partikuläre Lösung zu finden, macht man jetzt aus der Integrationskonstanten C eine Funktion $C(x)$, d.h., man postuliert folgenden Ansatz für y_P:

$$y_P = C(x)\bar{y}$$

und setzt damit, unter Berücksichtigung von $y_P' = C'(x)\bar{y} + C(x)\bar{y}'$, in die inhomogene DGL ein. Wie es weitergeht studieren wir an Hand zweier Beispiele:

Inh. lin. DGL, Beispiel I

$$y' + 2\frac{y}{x} = 4x$$

Zunächst muß die zugeordnete homogene DGL

$$y' + 2\frac{y}{x} = 0$$

gelöst werden. Man erhält (*bitte führen Sie die Rechnung zur Übung selbst durch!!*)

$$y_H = C\frac{1}{x^2}$$

und gewinnt daraus den Ansatz für die partikuläre Lösung

$$y_P = C(x)\frac{1}{x^2} \qquad y_P' = C'(x)\frac{1}{x^2} + C(x)\frac{-2}{x^3}$$

mit dem man in die inhomogende DGL einsetzt

$$\underbrace{C'(x)\frac{1}{x^2} + C(x)\frac{-2}{x^3}}_{y_P'} + \frac{2}{x}\underbrace{\frac{C(x)}{x^2}}_{y_P} = 4x$$

Inh. lin. DGL, Beispiel I

$$y' + 2\frac{y}{x} = 4x$$

Zunächst muß die zugeordnete homogene DGL

$$y' + 2\frac{y}{x} = 0$$

gelöst werden. Man erhält (*bitte führen Sie die Rechnung zur Übung selbst durch!!*)

$$y_H = C\frac{1}{x^2}$$

und gewinnt daraus den Ansatz für die partikuläre Lösung

$$y_P = C(x)\frac{1}{x^2} \qquad y_P' = C'(x)\frac{1}{x^2} + C(x)\frac{-2}{x^3}$$

mit dem man in die inhomogende DGL einsetzt

$$\underbrace{C'(x)\frac{1}{x^2} + C(x)\frac{-2}{x^3}}_{y_P'} + \frac{2}{x}\underbrace{\frac{C(x)}{x^2}}_{y_P} = 4x$$

Die beiden rot hervorgehobenen Terme kürzen sich weg. Dies ist kein Zufall! Die Terme, die $C(x)$ enthalten, müssen sich wegkürzen, ansonsten hat sich ein Rechenfehler eingeschlichen! (Man kann dies recht leicht zeigen, indem man die Lösung, beginnend mit der homogenen Gleichung, völlig allgemeinn durchführt.) In diesem Fall nicht weiterrechnen sondern Fehler suchen!!! Wenn sich die Terme in $C(x)$ nicht kürzen würden, wäre die Gleichung für $C(x)$ mindestens so schwer wie die Ausgangsgleichung.

Inh. lin. DGL, Beispiel I, Fortsetzung

Wir haben also

$$\frac{C'(x)}{x^2} = 4x \quad \text{bzw.} \quad C'(x) = 4x^3$$

Dies ist aber von der Form her die einfachste DGL überhaupt — erinnern Sie sich an die Einführung. Wir können direkt integrieren:

$$C(x) = 4\int x^3 dx = x^4$$

Somit haben wir für y_P

$$y_P = \frac{C(x)}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} = x^2$$

(die Integrationskonstante dürfen wir hier unter den Tisch fallen lassen, da eine partikuläre Lösung genügt.) Die allgemein Lösung der inhomogenen DGL ist somit

$$y = y_H + y_P = \frac{C}{x^2} + x^2$$

Erst in diese allgemeine Lösung darf eine AB eingesetzt werden. Z.B.: y(1)=3, d.h.

$$y(1) = 3 = \frac{C}{1^2} + 1^2 = C + 1 \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

somit ist $y = \frac{2}{x^2} + x^2$ die spezielle Lösung, die dieser AB genügt.

Inh. lin. DGL, Beispiel II

Gesucht ist die Lösung folgender DGL und AB:

$$x^2 y' + 3xy = \frac{\sin x}{x} \qquad y(\pi) = 0$$

I. Lösen der zugeordneten homogenen Gleichung

$$x^2 y' + 3xy = 0, \qquad y' + 3\frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -3\frac{dx}{x}, \qquad \ln y = -3\ln x + \tilde{C}$$

$$y = \frac{C}{x^3}$$

II. Variation der Konstanten, $y_P = \frac{C(x)}{x^3}, y_P' = \frac{C'(x)}{x^3} - 3\frac{C(x)}{x^4}$

$$\frac{C'(x)}{x^3} - 3\frac{C(x)}{x^4} + \frac{3}{x}\frac{C(x)}{x^3} = \frac{\sin x}{x^3}$$

$$C'(x) = \sin x, \qquad C(x) = -\cos x, \qquad y_P(x) = -\frac{\cos x}{x^3}$$

$$y = y_H + y_P = \frac{C - \cos x}{x^3}$$

III. Einsetzen der AB:

$$y(\pi) = 0 = \frac{C - \cos \pi}{\pi^3} \quad \Rightarrow \quad C = -1$$

Inh. lin. DGL, Abschlußbemerkung

In Formelsammlungen und vielen Lehrbüchern findet man eine “Einschrittformel” zum Lösen von inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung. Diese bekommt man, wenn man die nötigen Schritte allgemein durchrechnet. Da man sich aber bei genauerem Hinsehen keine Arbeit erspart, ziehe ich die “Zweischrittmethode” vor. Erstens kann man so die einzelnen Lösungsschritte eher nachvollziehen, und zweitens hat man im ersten Schitt der Variation der Konstanten einen Check (fallen alle Terme in $C(x)$ weg?), mit dem man manchen Rechenfehler noch finden kann.

DGL 2. und höherer Ordnung

Wir wenden uns jetzt DGL höherer Ordnung zu. Wir beschränken uns auf lineare DGLs. Weiters gibt es keine prinzipiellen Unterschiede zwischen DGLs 2. 3. 4. und höherer Ordnung, d.h., wir werden uns auf (inhomogene) lineare DGLs zweiter Ordung beschränken, d.h.,

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = h(x) \qquad \text{(A)}$$

Wie bei linearen DGLs 1. Ordnung bezeichnet man den Spezialfall $h(x) = 0$ als homogen bzw. bezeichnet

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = h(x) \qquad \text{(B)}$$

(B) als die zu (A) zugeordnete homogene Gleichung.

Bevor wir uns dem allgemeinen Fall zuwenden, betrachten wir jetzt den einfachsten Spezialfall von (A)

$$y'' = h(x)$$

Hier kann man einfach *zweimal* integrieren, bekommt also

$$y' = \int y''\, dx = \int h(x) dx + C_1$$

$$y = \int y'\, dx = \int \left[\int h(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2$$

DGL 2. und höherer Ordnung

Die Lösung der DGL $y'' = h(x)$ ist also

$$y = \int y' dx = \int \left[\int h(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2$$

DGL 2. und höherer Ordnung

Die Lösung der DGL $y'' = h(x)$ ist also

$$y = \int y' dx = \int \left[\int h(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2$$

Dabei sind die Terme in blau, also die Terme die die Integrationskonstanten enthalten, Lösungen der zugeordneten homogenen Gleichung, der zweifach integrierte Störterm $h(x)$ hingegen ist die partikuläre Lösung, die die inhomogene Gleichung löst.

DGL 2. und höherer Ordnung

Die Lösung der DGL $y'' = h(x)$ ist also

$$y = \int y' dx = \int \left[\int h(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2$$

Dabei sind die Terme in blau, also die Terme die die Integrationskonstanten enthalten, Lösungen der zugeordneten homogenen Gleichung, der zweifach integrierte Störterm $h(x)$ hingegen ist die partikuläre Lösung, die die inhomogene Gleichung löst.

Allgemein erhält man bei linearen DGL 2. Ordnung zwei Integrationskonstanten. Es gilt:
Auf jedem Intervall I, auf dem die Koeffizienten $a_i(x)$ der DGL (A) (siehe vorige Folie) stetig sind, hat (A) eine stetige Lösung der Form

$$y = y_H + y_P = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + y_P \qquad (C)$$

die zwei unabhängige Konstanten c_1, c_2 enthält. Es gibt keine weitere Lösung auf I, die nicht aus (C) durch Spezialisierung der Konstanten gewonnen werden könnte. Jedes $u_i(x)$, $i = 1, 2$, ist eine Lösung der homogenen Gleichung (B) und vom jeweils anderen $u_{j \neq i}(x)$ linear unabhängig, *d.h., die Beziehung*

$$\alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) = 0$$

zwischen $u_1(x)$ und $u_2(x)$ wird nur durch die triviale Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ erfüllt. Da die allgemeine Lösung (C) zwei Konstanten enthält, sind zu deren Festlegung zwei AB notwendig.

DGL 2. und höherer Ordnung

Die Lösung der DGL $y'' = h(x)$ ist also

$$y = \int y' dx = \int \left[\int h(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2$$

Dabei sind die Terme in blau, also die Terme die die Integrationskonstanten enthalten, Lösungen der zugeordneten homogenen Gleichung, der zweifach integrierte Störterm $h(x)$ hingegen ist die partikuläre Lösung, die die inhomogene Gleichung löst.

Allgemein erhält man bei linearen DGL 2. Ordnung zwei Integrationskonstanten. Es gilt:
Auf jedem Intervall I, auf dem die Koeffizienten $a_i(x)$ der DGL (A) (siehe vorige Folie) stetig sind, hat (A) eine stetige Lösung der Form

$$y = y_H + y_P = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + y_P \qquad (C)$$

die zwei unabhängige Konstanten c_1, c_2 enthält. Es gibt keine weitere Lösung auf I, die nicht aus (C) durch Spezialisierung der Konstanten gewonnen werden könnte. Jedes $u_i(x)$, $i = 1, 2$, ist eine Lösung der homogenen Gleichung (B) und vom jeweils anderen $u_{j \neq i}(x)$ linear unabhängig, *d.h., die Beziehung*

$$\alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) = 0$$

zwischen $u_1(x)$ und $u_2(x)$ wird nur durch die triviale Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ erfüllt. Da die allgemeine Lösung (C) zwei Konstanten enthält, sind zu deren Festlegung zwei AB notwendig.
Man erkennt unschwer, daß bei einer Gleichung n-ter Ordnung (denken Sie an $y^{(n)} = h(x)$) durch die erforderliche n-fache Integration n Integrationskonstanten auftreten, somit ggf. n AB notwendig sind.

DGL 2. und höherer Ordnung

Wie löst man also

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = h(x) \qquad \text{(A)}$$

Im Prinzip sind die Schritte die gleichen wie bei linearen DGL 1. Ordnung: (1) Suchen der Lösungen der zugeordneten homogenen Gleichung, (B) mit den Lösungen der homogenen Gleichung wird eine Variation der Konstanten durchgeführt um die partikuläre Lösung zu finden.

Der große Unterschied zu Gleichungen 1. Ordnung besteht nun darin, daß bei DGL 2. und höherer Ordnung das Finden der homogenen Lösungen ungleich schwieriger ist. Typischerweise versucht man Lösungen zu finden, indem man Potenzreihen (denken Sie an Taylor/MacLaurinreihen) als Lösungsansätze verwendet und Bildungsgesetze für die Koeffizienten zu finden sucht, wobei aber einige Tricks zu berücksichtigen sind. Hat man homogene Lösungen, so bietet eine entsprechend verallgemeinerte Variation der Konstanten die Maschinerie zum Finden der partikulären Lösung.

Das Lösen von DGL 2. Ordnung mittels Reihen übersteigt den Rahmen dieser Vorlesung. Die Variation der Konstanten bei DGL 2. Ordnung ist im Skriptum beschrieben. Wir beschränken uns auf einen wichtigen Spezialfall, lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, d.h.,

$$y'' + p\, y' + q\, y = h(x) \qquad p, q \in \mathbb{R}$$

Hier ist das Lösen der homogenen Gleichung einfach, und für das Finden der partikulären Ableitung gibt es “Abkürzungen”.

Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wie löst man nun

$$y'' + p\,y' + q\,y = h(x) \qquad p, q \in \mathbb{R}$$

Nach allem bereits Gesagten brauchen wir zunächst die Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0$$

Erinnern wir uns kurz an das Analog 1. Ordnung

$$y' + k\,y = 0 \qquad \text{(I)}$$

Dies ist die einfachste separierbare Gleichung, aber könnten wir die Lösung auch anders finden? (I) stellt doch eine einfach Proportionalität zwischen der Funktion und ihrer Ableitung her, $y' = -ky$. Die einzige Funktionenklasse auf die das zutrifft, ist $y = e^{\lambda x}$. Wir setzen mit $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$ in (I) ein

$$\lambda e^{\lambda x} + ke^{\lambda x} = 0,$$

woraus wir sofort $\lambda = -k$ finden, d.h., $y = e^{-kx}$.

Verwendet man denselben Ansatz $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ für die homogene DGL 2. Ordnung mit konst. Koeff., so kommt man auf

$$y'' + p\,y' + q\,y = \lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0$$

Da $e^{\lambda x}$ nie Null werden kann, können wir diesen Faktor wegkürzen, und erhalten die sogenannte charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

mit i.a. 2 Lösungen, λ_1 und λ_2 bzw. $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Jedes Vielfache von y_1, y_2 sowie Linearkombinationen davon sind ebenfalls Lösungen, und wir erhalten die allgemeinste Form:

$$y = C\,y_1 + D\,y_2 = C\,e^{\lambda_1 x} + D\,e^{\lambda_2 x}$$

Der Charakter der Lösung unterscheidet sich allerdings maßgeblich, wenn die ${}_2\lambda_1$ reell, konjugiert komplex oder zusammenfallend sind: Dies untersuchen wir an Hand von konkreten Beispielen.

Homogene Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

I. Zwei reelle Lösungen der char. Gleichung Gesucht ist die Lösung von

$$y'' - y' - 2y = 0$$

Dies führt sofort auf die charakteristische Gleichung[1]

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Lösen der quadratischen Gleichung ergibt

$${}_2\lambda_1 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$$

Die allgemeinste Lösung der DGL ist also

$$y = Ae^{2x} + Be^{-x}$$

Wie in der allgemeinen Diskussion bemerkt, braucht man 2 Anfangsbedingungen. Es sei z.B. $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Wir berechnen $y' = 2Ae^{-2x} - Be^{-x}$ und erhalten das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 2A - B &= 0 \end{aligned}$$

Addieren der beiden Gleichungen ergibt $3A = 1$, somit $A = 1/3$. Aus z.B. der 2. Gleichung $(2/3 - B = 0)$ folgt dann $B = 2/3$. Für diese AB lautet die spezielle Lösung der DGL

$$y = \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{2}{3}e^{-x}$$

[1] Das Einsetzen mit $y = e^{\lambda x}$ wird im praktischen Rechnen übersprungen, $y'' \to \lambda^2$, $y' \to \lambda$, $y \to 1$

Homogene Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

I. Zwei konjugiert komplexe Lösungen der char. Gleichung Gesucht ist die Lösung von

$$y'' - 2y' + 10y = 0$$

Dies führt sofort auf die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

Lösen der quadratischen Gleichung ergibt

$${}_2\lambda_1 = 1 \pm \sqrt{1-10} \Rightarrow \lambda_1 = 1 + 3i,\, \lambda_2 = 1 - 3i$$

Die allgemeinste Lösung der DGL ist also

$$y = Ae^{(1+3i)x} + Be^{(1-3i)x} = e^x \left(Ae^{3ix} + Be^{-3ix} \right)$$

An und für sich sind wir fertig; die obige Lösung ist prinzipiell OK. Allerdings haben wir eigentlich reelle Lösungen erwartet, und auch für allfällige Anfangsbedingungen gehen wir von reellen x bzw. y Werten aus.

Daher formen wir

$$y = Ae^{(1+3i)x} + Be^{(1-3i)x} = e^x \left(Ae^{3ix} + Be^{-3ix} \right) \qquad (+)$$

mit dem Satz von Gauss $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ um:

$$\begin{aligned} y = e^x \left(A(\cos(3x) + i\sin(3x)) + B(\cos(-3x) + i\sin(-3x)) \right) = \\ = e^x \left(A(\cos(3x) + i\sin(3x)) + B(\cos(3x) - i\sin(3x)) \right) = \\ = e^x \left(\cos(3x)(A+B) + \sin(3x)(A-B)i \right) = \\ \\ = e^x \left(C\cos(3x) + D\sin(3x) \right) \qquad (*) \end{aligned}$$

wobei im letzen Schritt die Abkürzungen (alternativen Konstanten) $C = A + B$ und $D = i(A - B)$ eingeführt wurden. Zunächst haben wir jetzt die komplexe Exponentialfunktion durch Winkelfunktionen ersetzt, worunter man sich etwas mehr vorstellen kann. Leider sieht es so aus, als hätten wir das um den Preis komplexer Konstanten C und D erkauft. Man kann aber zeigen, daß in (*) alle erfüllbaren Anfangsbedingungen $y(x_0) = a$, $y'(x_0) = b$, mit x_0, a, und $b \in \mathbb{R}$ durch reelle C, D erfüllt werden können (im Gegensatz dazu sind die ursprünglichen Konstanten A, B in (+) oft komplex!).

Hat also die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ konjugiert komplexe Lösungen $\alpha \pm i\beta$, so kann man die allgemeine Lösung der DGL sofort als

$$y = e^{\alpha x} \left(C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x) \right)$$

schreiben.

Homogene Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

III. Zusammenfallende reelle Nullstelle: Gesucht ist die Lösung von

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Dies führt auf die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$

Lösen der quadratischen Gleichung ergibt

$$_2\lambda_1 = -3 \pm \sqrt{9-9} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -3$$

Somit finden wir als Lösung nur

$$y = Ae^{-3x}$$

Gemäß der allgemeiner Theorie ist das aber eine Funktion "zu wenig". Einfachste Anfangsbedingungen können nicht erfüllt werden (z.B. $y(0) = 0$). Es stellt sich heraus, daß bei zusammenfallenden reellen Lösungen, d.h., $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$, es immer eine zweite Lösung der Form

$$y_2 = C\,x\,e^{\alpha x} \quad \text{(im konkr. Bsp. } y = C\,x\,e^{-3x}\text{)}$$

gibt.

Homogene Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Überzeugen wir uns davon, daß diese zweite Lösung ebenfalls die DGL erfüllt.[2] Wir haben:

$$y_2 = C\,x\,e^{-3x} \qquad y_2' = Ce^{-3x} - 3C\,x\,e^{-3x} \qquad y_2'' = -6\,Ce^{-3x} + 9C\,x\,e^{-3x}$$

Damit erhalten wir aus der DGL

$$\overbrace{-6\,Ce^{-3x} + 9C\,x\,e^{-3x}}^{y_2''} + 6(\overbrace{Ce^{-3x} - 3C\,x\,e^{-3x}}^{y_2'}) + 9\,\overbrace{C\,x\,e^{-3x}}^{y_2} =$$

$$= -6Ce^{-3x} + 9C\,x\,e^{-3x} + 6Ce^{-3x} - 18C\,x\,e^{-3x} + 9C\,x\,e^{-3x} = 0 \quad \text{wie behauptet}$$

Fassen wir zusammen: Hat die charakteristische Lösung eine zusammenfallende, reelle Nullstelle ${}_2\lambda_1 = \alpha$, so hat die allgemeine Lösung der DGL die Form

$$y = Ce^{\alpha x} + D\,x\,e^{\alpha x}$$

[2] Ableiten kann man diese 2. Lösung mit einer als "Reduktion der Ordnung" bezeichneten Methode. Wenn Sie von einer homogenen linearen DGL (auch mit nicht konstanten Koeff.!) eine Lösung y_1 kennen, so hat eine weitere Lösung die Form $C(x)y_1$ (sehr analog zur Variation der Konstanten, nur geht es hier um homogene Lösungen!). Wenn Sie $C(x)y_1$ in die DGL einsetzen, erhalten Sie eine neue DGL mit $C(x)$ als gesuchter Funktion, deren Ordnung um eins niedriger ist als die ursprüngliche DGL. Wenn Sie neugierig sind, probieren Sie es am konkreten Beispiel aus! Siehe auch das Skriptum!

Homogene Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Zum Abschluß noch AB für das letzte Beispiel. Gesucht ist die spezielle Lösung der DGL

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

mit AB $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$. Die allgemeine Lösung lautet wie eben berechnet

$$y = Ce^{-3x} + D\,x\,e^{-3x}$$

und die erste Ableitung ist

$$y' = -3Ce^{-3x} + De^{-3x} - 3D\,x\,e^{-3x}$$

Für die Anfangsbedingung ergibt sich also:

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &= C \\ y'(0) = 5 &= -3C + D \end{aligned}$$

Somit folgt sofort $C = 0$ und $D = 5$, d.h., die spezielle Lösung zu den obigen AB lautet

$$y = 5xe^{-3x}$$

Partikuläre Lösungen inhomogener DGL 2. Ordnung mit konst. Koeff.

Wir wenden uns jetzt der Lösung des inhomogenen Falls

$$y'' + p\,y' + q\,y = h(x) \qquad (*)$$

zu. Wie besprochen ist die Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung Voraussetzung, und wir nehmen an, daß diese bereits berechnet wurde. Man kann eine partikuläre Lösung immer mit einer entsprechend verallgemeinerten *Variation der Konstanten* finden (s. Skriptum). Im Falle von konstanten Koeffizienten ist für bestimmte Typen von Störfunktionen $h(x)$ eine (in der Regel) einfachere Methode möglich, der *Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten*; nur diese Vorgangsweise wird im Rahmen dieser VO/UE behandelt.
Gesucht ist die Lösung von

$$y'' - y' - 2y = x^2$$

Die Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung, $y = Ae^{2x} + Be^{-x}$ haben wir bereits berechnet. Überlegen wir jetzt, wie eine partikuläre Lösung aussehen könnte. Auf der linken Seite der Gleichung sind y'', y' und y durch konstante Koeffizienten in Beziehung gesetzt, d.h., es herrscht eine einfach Proportionalität zwischen der Funktion und Ihren beiden ersten Ableitungen. Das heißt aber, daß die partikuläre Lösung "sehr viel" mit $h(x) = x^2$ zu tun haben muß. Könnte die partikuläre Lösung einfach die Form

$$y_P = a\,x^2 \qquad\qquad ???$$

haben? Bildet man $y_P' = 2ax$, $y'' = 2a$ und setzt in (*) ein, dann sieht man, daß einem auf der linken Seite die Terme $-2ax$ und $2a$ (also Terme $\propto x$ und $\propto 1$) durch die Ableitungen hinzukommen. Das "schreit" aber danach, auch Terme $bx + c$ in den Ansatz für y_P zu inkludieren.

Partikuläre Lösungen inhomogener DGL 2. Ordnung mit konst. Koeff.

Wir versuchen es also nochmals mit dem Ansatz

$$y_P = ax^2 + bx + c, \qquad y_P' = 2ax + b, \qquad y_P'' = 2a$$

und setzen in (*) ein

$$2a - (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = \quad x^2$$

Partikuläre Lösungen inhomogener DGL 2. Ordnung mit konst. Koeff.

Wir versuchen es also nochmals mit dem Ansatz

$$y_P = ax^2 + bx + c, \qquad y_P' = 2ax + b, \qquad y_P'' = 2a$$

und setzen in (*) ein

$$2a - (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = 1\,x^2 + 0\,x + 0 \cdot 1$$

Sortiert man jetzt die linke Seite nach Potenzen von x, so kann man einen Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite durchführen (wobei in diesem Fall die Koeffizienten für x und 1 gleich 0 sind). Man erhält also

$$x^2\,(-2a) + x\,(-2a - 2b) + 1 \cdot (2a - b - 2c) = 1\,x^2 + 0\,x + 0 \cdot 1$$

Daraus liest man sofort $-2a = 1$, d.h. $a = -\frac{1}{2}$ ab. Mit diesem Wert für a und

$$-2a - 2b = 0$$

findet man $b = \frac{1}{2}$, und mit den Werten für a, b zusammen mit

$$2a - b - 2c = 0$$

findet man schließlich $c = -\frac{3}{4}$. Somit gilt $y_P = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ und die vollständige Lösung der DGL lautet

$$y = y_H + y_P = Ae^{2x} + Be^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

Partikuläre Lösungen inhomogener DGL 2. Ordnung mit konst. Koeff.

Wenn man sich das letzte Beispiel nochmals durch den Kopf gehen läßt, so sieht man, daß sich der unbestimmte Ansatz für y_P aus einem Vielfachem der Störfunktion $h(x) = x^2$ *sowie* deren Ableitungen zusammensetzt.

Weitere Beispiele: Die Ableitung der Exponentialfunktion ist die Funktion selbst. Daher folgt für z.B.

$$h(x) = e^{5x} \quad \Rightarrow \quad y_P = c\, e^{5x}$$

Für $h(x) = \sin x$ gilt daher

$$h(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad y_P = a \sin x + b \cos x$$

Ist $h(x)$ ein allgemeines Polynom mit höchster Potenz x^m, so ist der Ansatz

$$y_P = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} \ldots + a_1 x + a_0$$

zu verwenden.

Die Methode scheitert wenn $h(x)$ unendlich viele sich nicht wiederholende Ableitungen hat, da in diesem Fall der unbestimmte Ansatz unendlich viele Terme enthalten müßte (z.B. $h(x) = 1/x$ oder $h(x) = \tan x$.

Partikuläre Lösungen inhomogener DGL 2. Ordnung mit konst. Koeff.

Leider ist es nicht immer so einfach. Erstens funktioniert diese Methode nur, wenn es sich bei den Störfunktionen um Polynome, Exponentialfunktionen $e^{\alpha x}$, die Winkelfunktionen $\sin(\alpha x)$ und $\cos(\alpha x)$ bzw. Produkte davon handelt. Für z.B. $h(x) = \tan x$ scheitert die Methode. Die Variation der Konstanten ist im Prinzip auf beliebige $h(x)$ anwendbar, wobei anzumerken ist, daß in der Praxis die auftretenden Integrale sehr rasch "unlösbar" werden ...

Zweitens, selbst wenn $h(x)$ zu den Funktionen gehört, für die ein unbestimmter Ansatz mit Koeffizientenvergleich möglich ist, kommt es zu Problemen wenn der unbestimmte Ansatz y_P auf eine Funktion führt, die bereits eine Lösung der homogenen Gleichung ist ... (überlegen Sie warum?!).

Die vollständigen Regeln für das Erstellen von unbestimmten Ansätzen, die Sie in Ihren Formelsammlungen finden, haben eine gewisse Komplexität und verlangen etwas Übung. Im Rahmen dieses Kurses geben wir daher immer den Ansatz für die Suche nach y_P an (Sie sollten sich aber trotzdem überlegen, warum man genau diesen Ansatz nimmt).

Partikuläre Lösung — abschließendes Beispiel

Gesucht ist die Lösung der DGL

$$y'' + 6y' + 9y = \sin(2x)$$

mit den AB: $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.

1. Lösung zu zugeordneten homogenen Gleichung

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Diese haben wir bereits ausgerechnet, $y_H = Ae^{-3x} + Bxe^{-3ex}$

2. Lösung der inhomogenen Gleichung. Aus unserer Faustregel folgt der Ansatz $y_P = C\sin(2x) + D\cos(2x)$, der in diesem Fall auch genügt. Wir haben also

$$y_P = C\sin(2x) + D\cos(2x) \qquad y_P' = 2C\cos(2x) - 2D\sin(2x) \qquad y_P'' = -4C\sin(2x) - 4D\cos(2x)$$

Damit erhalten wir

$$-4C\sin(2x) - 4D\cos(2x) + 6(2C\cos(2x) - 2D\sin(2x)) + 9(C\sin(2x) + D\cos(2x)) =$$

$$\sin(2x)(5C - 12D) + \cos(2x)(12C + 5D) = \sin(2x)$$

bzw. für den Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} 5C - 12D &= 1 \\ 12C + 5D &= 0 \end{aligned}$$

Aus der 2. Gleichung ergibt sich $C = -5D/12$, nach Einsetzen in die 1. Gleichung folgt $-25D/12 - 12D = 1 \Rightarrow D = -12/169$ und somit $C = 5/169$. Die partikuläre Lösung lautet somit

$$y_P = \frac{5}{169}\sin(2x) - \frac{12}{169}\cos(2x)$$

Partikuläre Lösung — abschließendes Beispiel

...und die allgemeine Lösung der DGL ergibt sich als

$$y = y_H + y_P = Ae^{-3x} + Bxe^{-3x} + \frac{5}{169}\sin(2x) - \frac{12}{169}\cos(2x)$$

3. Einsetzen der AB $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$: Wir berechnen die 1. Ableitung der allgemeinen Lösung

$$y' = -3Ae^{-3x} + Be^{-3x} - 3Bxe^{-3x} + \frac{10}{169}\cos(2x) + \frac{24}{169}\sin(2x)$$

An der Stelle $x = 0$ hat man

$$y(0) = 0 = A - \frac{12}{169}$$

$$y'(0) = 5 = -3A + B + \frac{10}{169}$$

Mit $A = 12/169$ (1. Gleichung) findet man für B (Einsetzen in 2. Gleichung)

$$5 = \frac{845}{169} = -\frac{36}{169} + B + \frac{10}{169} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{67}{13}$$

Die spezielle Lösung der DGL die die AB erfüllt lautet somit

$$y = \frac{12}{169}e^{-3x} + \frac{67}{13}xe^{-3x} + \frac{5}{169}\sin(2x) - \frac{12}{169}\cos(2x)$$

Anmerkung: Die wäre ein realistisches Prüfungsbeispiel

Systeme von DGLs

Gerade in der Biologie (Systembiologie) stößt man häufig auf Systeme von DGL. Hier ein Beispiel für 3 gekoppelte DGL 1. Ordnung

$$\begin{array}{rcl}
y_1' &=& a_1(x)y_1 + b_1(x)y_2 + c_1(x)y_3 \\
y_2' &=& a_2(x)y_1 + b_2(x)y_2 + c_2(x)y_3 \\
y_3' &=& a_3(x)y_1 + b_2(x)y_2 + c_3(x)y_3
\end{array}$$

Wir behandeln nur den einfachsten Fall, das System zweier homogener, linearer DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Lösungsschritte sind an Hand eines Beispiels illustriert.

DGL Systeme – ein Beispiel

Insbesondere wird gezeigt, wie man ein System zweier gekoppelter, linearer DGL 1. Ordnung durch "Einsetzen" bzw. "Elimination" in *eine* DGL 2. Ordnung überführt. Da wir nur lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten lösen können, enthalten die Gleichungssystem ebenfalls nur konstante Koeffizienten. (Im Prinzip ist das Verfahren aber auf allg. lineare DGL System anwendbar!) Weiters betrachten wir nur homogene Gleichungen.

Betrachten wir als konkretes Beispiel

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad y_1' &= y_1 + y_2 \\ \text{II:} \quad y_2' &= -4y_1 + y_2 \end{aligned} \tag{1}$$

DGL Systeme – ein Beispiel

Schritt 1: Als erstes drücken wir aus einer der Gleichungen eine der gesuchten Funktionen als Funktion der jeweils anderen Funktion sowier deren Ableitung aus.

Z.B. folgt aus I

$$y_2 = y_1' - y_1. \tag{2}$$

Um mit der aus I gewonnen Gl. 2 in Gl. II des Originalsystems einsetzen zu können, brauchen wir auch die Ableitung y_2' als Funktion von y_1. Daher differenzieren wir Gl. 2

$$y_2' = y_1'' - y_1'. \tag{3}$$

Unter Verwendung von Gl. 3 für die linke Seite von II und Gl. 2 für die rechte Seite erhalten wir für

$$\text{II:}\ \underbrace{y_1'' - y_1'}_{y_2'} = -4y_1 + \underbrace{y_1' - y_1}_{y_2},$$

welches sich zu

$$y_1'' - 2y_1' + 5y_1 = 0 \tag{4}$$

umformen läßt.

DGL Systeme – ein Beispiel

Schritt 2: Was y_1 betrifft, sind wir mit Gl. 4 jetzt auf vertrautem Territorium. Mittels des Standardansatzes $y_1 = e^{\lambda x}$ erhält man die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

mit den beiden konjugiert komplexen Lösungen

$${}_2\lambda_1 = 1 \pm 2i.$$

Daraus folgt, daß die beiden Funktionen $e^x \sin 2x$ und $e^x \cos 2x$ die DGL Gl. 4 lösen. Somit ist die allgemeinste Lösung von Gl. 4 durch

$$y_1 = Ae^x \sin 2x + Be^x \cos 2x = e^x \left(A \sin 2x + B \cos 2x\right) \tag{5}$$

gegeben.

DGL Systeme – ein Beispiel

Schritt 3: Um die fehlende Lösung für y_2 zu bekommen, setzen wir mit Gl. 5 in Gl. 2 ein, wobei wir als Zwischenschritt y_1' berechnen müssen. Nach Differenzieren (Produktregel!) und Zusammenfassen erhalten wir

$$y_1' = e^x \left[(A - 2B)\sin 2x + (2A + B)\cos 2x\right].$$

Somit bekommt man für y_2

$$y_2 = \underbrace{e^x \left[(A - 2B)\sin 2x + (2A + B)\cos 2x\right]}_{y_1'} - \underbrace{e^x \left(A\sin 2x + B\cos 2x\right)}_{y_1}$$

was sich auf

$$y_2 = -2Be^x \sin 2x + 2Ae^x \cos 2x = e^x \left(-2B\sin 2x + 2A\cos 2x\right) \tag{6}$$

vereinfacht. Die allgemeinste Lösung des Gleichungssystems Gl. 1 ist also durch Gln. 5 (für y_1) und 6 (für y_2) gegeben.

DGL Systeme – ein Beispiel

Schritt 4, Anfangsbedingungen: Wir wollen jetzt die allgemeine Lösung noch auf Anfangsbedingungen spezialisieren. Es sei z.B.

$$y_1(0) = 1$$
$$y_2(0) = 1$$

Einsetzen in Gln. 5 und 6 ergibt ($e^0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$!)

$$B = 1$$
$$2A = 1$$

woraus $B = 1$ und $A = \frac{1}{2}$ folgt. Die spezielle Lösung des DGL Systems Gl. 1, die auch den Anfangsbedingungen genügt ist also

$$\begin{aligned} y_1 &= e^x\left(\tfrac{1}{2}\sin 2x + \cos 2x\right) \\ y_2 &= e^x\left(-2\sin 2x + \cos 2x\right) \end{aligned} \tag{7}$$

DGL Systeme – ein Beispiel

Anmerkungen: (1) Anstelle uns aus I y_2 auszudrücken, hätten wir uns aus II $y_1 = \frac{1}{4}(y_2 - y_2')$ ausdrücken können, und zunächst die allgemeine Lösung für y_2 ermitteln können. *Achtung:* Die unbestimmten Koeffizienten schauen natürlich "anders" aus, aber die spezielle Lösung, die den Anfangsbedingungen genügt, unterscheidet sich nicht von Gl. 7.

(2) Der hier gezeigt Lösungsweg führt auf das Lösen einer linearen DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wie in der Vorlesung besprochen, gibt es drei Lösungstypen, in Abhängigkeit von der Lösung der charakteristischen Gleichung:

(i) zwei reelle Lösungen,

(ii) zwei (konjugiert) komplexe Lösungen, und

(iii) eine zusammenfallende reelle Lösung.

Das hier gezeigte Beispiel führt auf den Lösungstyp (ii). Der Lösungsweg ist aber auf jeden der drei Typen anwendbar!

Abschlußbemerkungen zu DGL Systemen

Wir haben eben gesehen, daß sich *zwei* gekoppelte DGL *erster* Ordnung auf eine Gleichung *zweiter* Ordnung umformen lassen. Der umgekehrte Weg ist ebenfalls möglich: Gegeben sei

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \qquad (*)$$

Wir führen eine Funktion $z = y'$ ($z' = y''$) ein. Damit läßt sich aber (*) auch schreiben

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' + p\,z + q\,y &= 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= -q\,y - p\,z \end{aligned}$$

D.h. aber, daß sich jede (lineare) DGL 2. Ordung auch als ein System von *zwei* DGL *erster* Ordnung schreiben läßt. Ganz allgemein kann man eine lineare DGL n-ter Ordnung immer als System von n DGL 1. Ordnung umschreiben, und umgekehrt. Die Umwandlung in ein System von DGL ist vor allem für die numerische Lösung (mit Hilfe von Techniken aus der linearen Algebra, Matrizenrechnung) von großer Bedeutung.

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.
This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.
We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "**Document**", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "**you**". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.
A "**Modified Version**" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.
A "**Secondary Section**" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.
The "**Invariant Sections**" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.
The "**Cover Texts**" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "**Transparent**" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "**Opaque**". Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.
The "**Title Page**" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.
A section "**Entitled XYZ**" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "**Acknowledgements**", "**Dedications**", "**Endorsements**", or "**History**".) To "**Preserve the Title**" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.
The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.
You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.
If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.

C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.

D. Preserve all the copyright notices of the Document.

E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.

F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.

G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

H. Include an unaltered copy of this License.

I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.

J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.

K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.

L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.

M. Delete any section Entitled “Endorsements”. Such a section may not be included in the Modified Version.

N. Do not retitle any existing section to be Entitled “Endorsements” or to conflict in title with any Invariant Section.

O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.
You may add a section Entitled “Endorsements”, provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties–for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.
You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.
The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.
The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number.
Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.
In the combination, you must combine any sections Entitled “History” in the various original documents, forming one section Entitled “History”; likewise combine any sections Entitled “Acknowledgements”, and any sections Entitled “Dedications”. You must delete all sections Entitled “Endorsements”.

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.
You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

> *Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".*

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with ... Texts." line with this:

> *with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.*

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.